



Title	非同次型線状移動可能函数方程式ニ就テ (VI)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 121, p. 53-59
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74470
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

545. 非同次型線狀移動可能函數 方程式ニ就テ(VI)

北 川 敏 男 (阪大)

(V) ノ訂正ト校正

(i) 訂正: 第120号 p.37 補助定理1ニ於イテ

" $f^{(v)}(0) = 0$ ($v = 0, 1, 2, \dots, m-1$) ナラバ" トイフ

條件ヲ加ヘル。コノ條件ハ何等本質的ナ制限トハナラナイ。

$$\text{即チ } g(x) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = g^*(x) \text{ トオケバ,}$$

$g^*(x)$ = ツイテハコノ條件ガミタサレテ居ル。ソレデ問題ハ

$$\Gamma f(x) = x^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

$$\Gamma f(x) = g^*(x)$$

ヲ解クコト = 歸スルカラデアアル。

(ii) 校正: p. 38 第一行目 “從ツテ吾人ノ得ルトコロ”
ノアトノトコロヘ次ノ數行ノ印刷ガ落チテアル:

$$\int_c^x g_1(\xi) d\xi = \int_c^x g(\xi) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} (1 - g_A(u)) du \right\} d\xi$$

依ツテ $x = 0$ シテ微分シテ

$$g_2(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)}}{iu} (1 - g_A(u)) du \right\} d\xi \right\}$$

茲デ

$$\rho(\tau) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu\tau}}{iu} (1 - g_A(u)) du$$

$$\rho^{(-1)}(\tau) = \int_0^\tau \rho(\tau) d\tau$$

トオクトキ, $g(0) = 0$ ト $g(x) = 0$ (x^∞) ト = ヨツテ

$$g_2(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^\infty g'(\xi) \rho^{(-1)}(x-\xi) d\xi \right\}$$

茲デ differentiation ヲ内ヘ入レテモヨイカラ
(証明省略)

$$g_2(x) = \int_0^\infty g'(\xi) f(x-\xi) d\xi$$

同様ノ議論ヲ繰返シテ (16)ヲ得ル。

(iii) 訂正: p. 38 §7 (20)ヲ (20₁)ト書き, 次ノ條件ヲ (20₂)トシテ加ヘルト: “或ル適當ノ正整数 q ガアツテ

$$(20_2) \quad \sum_1^\infty |A_n| n^{-q} < \infty$$

デアルトスル。” 是レ=ヨツテ (23)ノ *existence* 並ビニテ 1. 任意ノ有限区間で一様収斂デアルコトガ (24)=ヨツテ明カニナル。

依ツテ p. 38ノ下四行ヲ削ル。

(iv) 校正: p. 40 五行目 $e^{iu}(x_0-t-\alpha_n)$ デハナクテ $e^{iu}(x_0-\alpha_n)$ デアル。(30) = 於イテモ $x_0-t-\alpha_n$ デナクシテ $x_0-\alpha_n$ デアル。

(v) 訂正: p. 40 (3) 式ヲ次ノ如ク改メル。

$$(3) \quad I_c = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\lambda x}}{q(u) e^{\lambda x_0}} \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{A_n}{2\pi} \int_0^1 \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x_0-\alpha_n+\xi)}}{(iu-\lambda)(iu)^m} (1-g_A(u)) du \right] dp(\xi) \right\} d\lambda$$

次=コレヲ計算スル。(以上)

$$10. (32) \quad h_\lambda(\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu\delta} (1-g_A(u))}{(iu-\lambda)(iu)^m} du \quad (\delta < 0)$$

トオケル

$$(33) \quad \frac{d^m h_\lambda(\delta)}{d\delta^m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu\delta}}{iu-\lambda} d\delta - \frac{1}{2\pi} \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} \frac{g_A(u) e^{iu\delta}}{iu-\lambda} du$$

コゝテ右辺ノ第一項ハ $R(\lambda) > 0$ ノトキ $-e^{\lambda\Delta}$, $R(\lambda) < 0$ ノトキ 0 トナル。第二項ヲ今假リ $= -\Phi_\lambda(\Delta)$ トオケバ,

$$(34) \quad e^{\lambda\Delta} \frac{d}{d\Delta} \left[e^{-\lambda\Delta} \Phi_\lambda(\Delta) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} g_A(u) e^{i u \Delta} du$$

$$g_A^{(\nu)}(\pm(A+\delta)) = g^{(\nu)}(\pm A) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

(p ハ任意ノ自然数) = 依ツテ (33) ハ

$$\frac{(-1)^p}{2\pi \Delta^p} \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} g_A^{(p)}(u) e^{i u \Delta} du$$

茲ニ至ツテ $g_A^{(p)}(u) = 0$ ナルマウナ p が $g_A(u)$ ノ始メカラエラシメオイトスル (ソウイフ制限ヲ $g_A(u) = \pi \delta(u)$ テモ、今マデノ議論ニハ影響シナイ。但シ、 $p+m < p$ デアルコトヲ要スル)。 (33) ハ常ニ 0 デアル。依ツテ

$$e^{-\lambda\Delta} \Phi_\lambda(\Delta) = C$$

C ハ $\lambda = \varepsilon \Delta = \varepsilon$ depend シナイ。シカルニ $R(\lambda) > 0$ ナラバ右辺ハ $\Delta \rightarrow \infty$ ノトキ常ニ零デアル。

依ツテ

$$\frac{d^m h_\lambda(\Delta)}{d\Delta^m} = \begin{cases} -e^{\lambda\Delta} & (R(\lambda) > 0 \text{ ノトキ}) \\ 0 & (R(\lambda) < 0 \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

従ツテ (32) ハ ($|\lambda| \rightarrow \infty$ ノトキ $\Delta (< 0)$ ノ如何ニカ、ハテズ零トナルコトニ注意シテ)

$$(35) \quad h_\lambda(\Delta) = \begin{cases} -\frac{e^{\lambda\Delta}}{\lambda^m} & (R(\lambda) > 0 \text{ ノトキ}) \\ 0 & (R(\lambda) < 0 \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

サテ $x_0 - \alpha_n + \xi < x_0 + \xi < 0$ デアルカラ, (35) = ヨツテ I_c ハ次ノ如クナル。

$$(36) \quad I_c = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^{(+)}} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^n G(\lambda)} d\lambda$$

コゝ = $\mathcal{C}^{(+)}$ ハ $\mathcal{C}$ ノ ヲチ $R(\lambda) \geq 0$ = 属スル部分ヲ意味スル。

11. 以上ノ結果ヲマトメテ述ベテ置カシ。

定理. *Linear translatable operator*

$$I'f(x) = \int_0^x f(x+\xi) d\rho(\xi)$$

= 関スル函数方程式

$$(1) \quad I'f(x) = g(x) \quad (0 < x < \infty)$$

= 於テ、次ノコトガ假定サレテアルトスル。

I. I' ノ母函数 $G(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda \xi} d\rho(\xi)$ ハ, $G^{(\nu)}(0) = 0$,
 $(\nu = 0, 1, 2, \dots, k-1) \quad G^{(k)}(0) \neq 0$ トシ

$$(b) \quad \frac{\lambda^k e^{\lambda x}}{G(\lambda)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^k(x) \lambda^\nu$$

ハ $|\lambda| < 1$ ガ正則デアル,

II. $R(\lambda) > 0$ = 於テハ

$$(20) \quad \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{N(x-\alpha_n)}$$

トナル。コレハ任意ノ正数 ε = 對シテ $R(\lambda) \geq \varepsilon$ = 於ケル λ = 關シ、一樣收斂デアルトスル。

又或ル自然数 g = 對シ

$$(20_2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| n^{-\delta} < \infty$$

III. 適當に contour, sequence $\{\mathcal{C}_\nu\}$ がアツテ、
 $\forall$ positive half-parts $\exists \{\mathcal{C}_\nu^{(+)}\}$ トスルトキ、

$$(37) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\nu^{(+)}} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^m G(\lambda)} d\lambda = B_{m-k}^{k+}(x) \quad (\text{say})$$

が x , 任意有限区間 ($\text{但し } x < 0$) で一様 = 収斂スル。

$$\text{IV. } \lim_{x \rightarrow \infty} g^{(m)}(x) = 0$$

$$\text{V. (38)} \quad \int_0^\infty g^{(m)}(t) B_m^{k+}(x-t) dt \text{ が存在スル。}$$

然ルトキ

$$(39) \quad \begin{cases} 1^\circ & \mathcal{G}_A(u) = 0 & |u| \geq A + \delta \\ 2^\circ & \mathcal{G}_A(u) = 1 & |u| \leq A \\ 3^\circ & A \leq u \leq A + \delta \text{ へ連続函数ヲモツテ結び, } \end{cases}$$

ソレハ、 $u = A, A + \delta$ = 於テハ無限回微分可能ナ

ソノ値ハ常 = 零。又 $g + m < p$ ナルアル p = 對シ

テ始メテ $\mathcal{G}^{(p)}(u) \equiv 0$ トナル。 $-A \leq u \leq (A + \delta)$

= 於テモ同様 = define スル。

カク補助函数ヲ導入スルトキ、(1)ノ解トシテ

$$(40) \quad g(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} B_\nu^k(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{i u(x-t)} \mathcal{G}_A(u) du \right\} dt \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g^{(m)}(t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{1 - \mathcal{G}_A(u)}{(i u)^m} e^{i u(x-t)} du \right\} dt$$

ヲ與ヘルコトが出来ル。

12. コノ種ノ問題ニ関シ *Ghermanesco* (*Acta Math.* 62)
Bochner (*Acta Math.* 51) *Wiener* (*M. I. T.* IV) 等
ノ方法が知ラレテキル。茲デ試ミタ方法ハ *Schmidt* ト
Wiener トニ依ルトコロが多いが、*Cauchy* 級数ニヨル
展開ヲ用キタ点か一ツノ試ミデアルカモ知レナイ。*Wiener*
ノ方法及ビ結果ハ、タシカニ含マレテキル。尚 (40)ニ得タ解
ハ、未ダ主解ナリトハ言ヒ得ナイ。ソレハ未ダ特解(*Bochner*
ノ語) トイフベキデアル。