



Title	Nulldimensionaler Kompaktum / Abbildungstheorie (其ノ二)
Author(s)	中澤, 武雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 122, p. 66-83
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74473
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

548. Nulldimensionaler Kompaktum / Abbildungstheorie (其ノ二)

中澤 武雄 (東京文理大)

前回ノ続キデアリマス。

KompaktumヲKompaktum (ノ中, 或ハ全体)
ヘ移ス一意連続寫像ノ集合ヘMetrikヲ入レテ⁽¹⁾ Abbil-
dungsraumト呼ブ。Abbildungsraumガbesch-
ränkt $\neq$ separabel $\neq$ vollständig + コトハ
既ニ分ツテアル。⁽²⁾

コノAbbildungsraumノ次元, 寫像類ノ個數, 及
ビkompakt + タメノ條件等ヲ考ヘルコトハKompaktum
ノTopologieニ於テカカリ面白イ問題ノ一ツト思ハレル。
然シ之等ノ諸問題モnulldimensionalノトキハ簡單ニ

(1) 大塚教授, 5卷1号, 22頁

(2) 同上拙文23頁定理II, 及ビ

K. Borsuk, "Sur les rétractes". *Fund. Math.*
17, 1931, (164—167)

解ケテシマフ。

I. Abbildungsraum / 次元

定理 1. (Nulldimensionaler) Kompaktum
ヲ nulldimensionaler Kompaktum (1 中, 或
ハ全体) へ移ス Abbildungsraum ハ nulldimen-
sional デアル。

証明. Abbildungsraum ハ一般ニハ kompakt
デナイカラ、茲ニ証明セントスル次元モ Menger 流ノ次元⁽³⁾ デアル。

即チ任意ノ Abbildung f_0 ノ任意ノ ε -Umgebung
 $\varepsilon(f_0)$ ニ對シテ f_0 ノ含ム適當ナ offene Menge $O(f_0)$
ガ存在シテ $\varepsilon(f_0) \supset O(f_0)$, $O(f_0) = \overline{d(f_0)}$ ナルコトが言ヘ
レバヨイ。

今寫シコマルル nulldimensionaler Kompaktum
ヲ $\mathcal{T}$ トシ $\mathcal{T}$ ノ Nerv ノ次元ガ 0 ナル如キ ε -Überdeck-
ung ノ Element ヲ $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_s$ トスル。 $\mathcal{T}$ ノ点 x ノ
 f_0 = 用スル Urbild ノ集合ヲ $f_0^{-1}(x)$ トカクコトニシテ
 $\mathcal{T}$ ノ総テノ点 x = 因シテ x ト $f(f_0^{-1}(x))$ トカ同ジ $\mathcal{T}_i$ = 含
マレル如キ Abbildung f ノ総テノ集合ヲ $O(f_0)$ トス
ル。然ラバ明テカニ $O(f_0) \ni f_0$, 又 $\rho(f, f_0) < \delta(\mathcal{T}_i) < \varepsilon$

(3) K. Menger, "Über die Dimensionalität von
Punktmengen", Wien. Monatsch. 33 (1923),
(148-160).

ナル故 $\varepsilon(f_0) \supset O(f_0)$ 。

次 $O(f_0)$ が *open* = シテ同時 = *abgeschlossen*
ナコトヲ 証明スル。

$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$ ハ 互 = 共通根ヲ有セザル開集合デアルカ
テ $\min_{i \neq j} \rho(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \delta > 0$ ナル正数デアル。一方
Abbildungsraum = 於ケル $O(f_0)$ ノ *Komplementär-
menge* $C(f_0)$ トシ $C(f_0) \ni g$ ナル任意ノ g ヲ考ヘル
ト $O(f_0)$ ノ定義ヨリ明ラカニ $\mathcal{F}$ ノ 少クトモ一 点 x = 對シ
テ $x \in g(f_0^{-1}(x))$ トハ異ナル $\mathcal{F}_i$ = 含マレル。

シカレバ $O(f_0) \ni f$ ナル任意ノ f = 因シテハ x ト
 $f(f_0^{-1}(x))$ トハ 同ジ $\mathcal{F}_i$ = 含マレル故 $\rho(f, g) \geq \delta$,
 $\rho(f, g) \geq \delta$ 。 故ニ $\rho(f, g) \geq \delta$ 。

$$\text{故ニ } \rho(O(f_0), C(f_0)) = \min_{\substack{f \in O \\ g \in C}} \rho(f, g) \geq \delta.$$

故ニ $O(f_0)$ ハ *open* = シテ同時 = *abgeschlossen* デ
アル。

故ニ *Abbildungsraum* ハ *Menger*, 意味デ *null-
dimensional* デアル。 — 証明終 —

系. (*Nulldimensionaler*) *Kompaktum* ヲ
nulldimensionaler Kompaktum (ノ 中, 或ハ全体) ハ
移ス *Abbildungsraum* ハ *vollständig zusammenhan-
glos* ⁽⁴⁾ デアル。

(4) K. Menger, "Dimensions-theorie," Leipzig,
Teubner, 1928.

証明. 定理1 = 仍り Abbildungsraum は
 nulldimensional $\Rightarrow$ あり nulldimensionale Menge
 は vollständig zusammenhanglos $\Rightarrow$ あり $\overset{(*)}{\text{V.}}$

以上

従って Kettenhomotopie $= \exists \text{ Kurven-}$
 homotopie $= \exists \text{ Abbildungsklasse, 個数ヲ}$
 考へルコトハ字像ノ個数ヲ考へル問題ニ帰着スル。

II. Abbildung, 個数

定理1. Kompaktum $\rightarrow$ Kompaktum (ノ中,
 或ハ全体) $\rightarrow$ 寫入寫像ノ個数ハ高々 H 個デアイル。

証明. Abbildungsraum が separabel ナコト
 ヨリ明ラカ。以上

定義1. 集合 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\}$ ノコト
 ナ便宜上 P ト呼バコトニシテオク。

補助定理1. 有限ナラザル (nulldimensionaler)
 Kompaktum ハ P ト homöomorph ナル部分集合ヲ
 含ム。(trivial!).

補助定理2. 有限ナラザル nulldimensionaler
 Kompaktum ハ P 全体ニ eindeutig stetig = 描寫
 可能デアイル。

証明. $\mathcal{P}$ 内ニ少クトモ一ツ存在スル Häufungspunkt
 $x \neq 0$ = 収斂スル ε_n ナトル。 $\mathcal{P} = U_0(x)$, x, ε_n - ange-
 zeichnete Umgebung $\rightarrow U_n(x)$ トシ $\{U_n(x) \mid U_{n+1}(x)\}$

ノ中, 空ナラザルモノノ Folge $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n, \dots$
トシ $f(\mathcal{F}_n) = \frac{1}{n}, f(0) = 0$ トスレバ f ハ $\mathcal{F}$ $\mathcal{P}$ 全体
ヘ寫ス一意連続寫像デアアル。以上

補助定理3. $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}$ 全体ヘ (*homöomorph* =) 寫
ス寫像ノ個數ハ $\aleph$ 個デアアル。

証明. $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}, f(0) = 0$ トスレバ f = 對應
シテ正數列 $\{n_\nu\}$ が決ル。逆 = 増加正整數列 $\{n_\nu\}$ フトレ
ル之 = 對應スル寫像 f が存在スル。今斯ル數列ノ中 $\{n_\nu\}$,
($n_{2m-1} = 2m-1, n_{2m} = 2m$ ナルカ或ハ $n_{2m-1} = 2m,$
 $n_{2m} = 2m-1$) ナルモノノ ミヲ考ヘテモソノ個數ハ $2^{\aleph}$ 即
チ $\aleph$ 個存在スル。シカモ之レ = 對應スル寫像ハ $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}$ 全
体ヘ (*homöomorph* =) 移ス。從ツテ寫像ノ個數ハ少
トモ $\aleph$ 個。之ト定理1カラ丁度 $\aleph$ 個 = ナル。以上

補助定理4. (*Nulldimensionaler*) *Kompak-*
tum $\mathcal{F}$ 有限個ノ互 = *unzusammenhängend* ナ部
分集合ノ集合 = *zerlegen* スル仕方ハ高々可附番個デ
アル。

証明. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$ が $\mathcal{F}$ *unzusammenhän-*
gend ナ分割トハ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{F}_s, i \neq j$ ナラバ
 $\mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j = 0, \overline{\mathcal{F}_i} = \mathcal{F}_i, (i, j = 1, \dots, s)$ ナルコトデ
アル。

從ツテ $\min_{i \neq j} \rho(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = d > 0$ ナリ。コノ d ノコ
トヲ分割 $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$ ノ距離ト云フ。然ルニ距離ガ ε, ε ヨ
リ大ナル分割ノ仕方ハ高々有限個シカアリ得ナイ。何者、

假ニ可附番個アツタトセヨ。ソノ分割ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots$ トスル。 $\mathcal{T}$ ノニ点 x, y が如何ナル φ_m = 包ツテモ *separate* サレナイトキ x, y ヲ同類トスルナラバ。之レデ $\mathcal{T}$ ノ点ヲ分類デキル。

類ノ個數ハ可附番個! 各々カラ代表=一点ヲ取出シテ $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$ トスル。然テノ φ_m ノ距離ハ ε_ν ヨリ大デアルカラ相異ナル $p, q =$ 對シテ $\rho(x_p, x_q) > \varepsilon_\nu$ 。之レハ *Kompaktheit* ト矛盾スル! ソコデ ε_ν ヨリ大ナル距離ノ分割ノ仕方ハ高々有限個デアル。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \dots \rightarrow 0$ トスルト高々可附番個ノ分割ガ數ヘラレテ任意ノ分割ハソノ中ニ數ヘラレテキル。以上。⁽⁵⁾

定理 2. *Nulldimensionaler Kompaktum* $\mathcal{T}_1$ 7 *nulldimensionaler Kompaktum* $\mathcal{T}_2$ ノ中ニ移ス *Abbildung* ノ個數が高々可附番ナルタメニ必要ナル條件ハ $\mathcal{T}_2$ が *abzählbares Kompaktum* = シテ且ツ $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ノ何レカ少ナクトモ一方が有限集合ナルコトデアル。

証明. (i) 必要ナルコト。

若シ $\mathcal{T}_2$ が有限集合ナラバ $\mathcal{T}_1$ 全体ヲ $\mathcal{T}_2$ 内ノ任意ノ一点ニ寫ス如キ寫像ガ數ヘテモ有限個ニナル。之レハ不合理。

次ニ $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 共ニ無限集合ナリトスレバ補助定理 2 = ヨリ

(5) 此ノ証明ハ大學數學 5 卷ノ号 27 頁補助定理 2ノ証明ト重複シテキルが、定理ハ一般ノ *Kompaktum* = 迄言ヘル定理デアアル。

$\mathcal{F}_1$ は P 全体へ写し、補助定理 1 = 従リ $\mathcal{F}_2$ は P と同形ナル部分集合 P^* を有ス。補助定理 3 = ヨリ P を P^* へ移ス寫像ハ少クとも中個アル、之レモ不合理。

従ツテ $\mathcal{F}_2$ は高々可附番集合デ $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ 何レカーオハ有限集合デナケレバナラス。

(ii) 十分ナルコト。

$\mathcal{F}_1$ が有限集合ナルトキハ $\mathcal{F}_1$ の個數ヲ n トスル $\mathcal{F}_2$ は高々可附番集合ナル故 *Abbildung* の個數ハ高々 $\aleph_n$ 即チ可附番個デアアル。次ニ $\mathcal{F}_2$ が有限集合ナラバ $\mathcal{F}_2$ の任意ノ点 x の Urbild $f^{-1}(x)$ ハ $\mathcal{F}_1$ 中ノ *offen* ノ開集合デアアル。従ツテ f = 對シテ只一ツノ $\mathcal{F}_1$ 互ニ *unzusammenhängend* 十有限個ノ部分集合ノ集合へノ分割ガ對應スル。

然ルニ斯ル分割ノ個數ハ補助定理 4 = 仍ツテ高々可附番個シカナイ。従ツテ *Abbildung* ノ個數モ高々可附番個デアアル。以上。

系. *Nulldimensionaler Kompaktum* $\mathcal{F}_1$ を *nulldimensionaler Kompaktum* $\mathcal{F}_2$ 中へ移ス *Abbildung* ノ個數ハ高々有限個ナルタメニ必要十分ナル條件ハ $\mathcal{F}_2$ が只一点ヨリナル集合ナルカ $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 共ニ有限集合ナルカデアアル。

証明. 必要ナルコト。

若シ $\mathcal{F}_2$ が無限集合ナラバ $\mathcal{F}_1$ 全体ヲ $\mathcal{F}_2$ 内ノ任意ノ一点ニ寫ス如キ寫像ガ個數ハテモ無限個ニナツテ不都合。次ニ

$\mathcal{C}_1$ が無限集合, $\mathcal{C}_2$ が少クとも二点ヲ有スル集合ナリトスレバ補助定理2ニヨリ $\mathcal{C}_1$ ハ P 全体ヘ字レ $\mathcal{C}_2$ ハ例ヘバニ点 x, y ヲ含ム。 $P \ni \{x, y\} =$ 寫入寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right) = x, (1 \leq n \leq s), f_s\left(\frac{1}{n}\right) = y, (s < n), f(0) = y$$

斯ル f_s ガケ数ヘテモ可附番個ニナツテ不都合。即チ $\mathcal{C}_2$ が少クとも二点ヲ保有スルトキハ $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 共ニ有限集合デナケレバナラヌ。

十分ナルコトハ明ラカデアアル。以上。

補助定理 5. Cantor-集合ヲ自ラ全体ヘ寫シ、シカモ不動点ノナイ *topologische Abbildung* ガ何個存在スル。

証明. Cantor-集合内ノ点ノ間ニ次ノ如キ加法ヲ定義シテ加群ニスル:

3進法ニ依ル任意ニ点 x, y ノ表示ヲ夫々 $0.\xi_1\xi_2\dots\xi_n\dots$, $0.\eta_1\eta_2\dots\eta_n\dots$ トスルトキ
 $x+y = 0.(\xi_1+\eta_1 \pmod{4})(\xi_2+\eta_2 \pmod{4})\dots(\xi_n+\eta_n \pmod{4})\dots$
 -----, (但シ $\xi_n+\eta_n \pmod{4}$ トハ4ニナルト0ニスル意味ナリ)ト定義スル。然ラバ明ラカニ Cantor-集合ノ *Metrik* ヲ加群ノ *Metrik* ト考ヘテモ位相的ニハ差支ヘナイ。

今 $C \ni t$ ナル t = 関聯スル *Abbildung* f_t トハ次ノ如キモノヲ指ス: $C \ni x$ ナル x = 對シテ $f_t(x) = x+t$ 。

然ラバ明ラカニ f_x は C ヲ C 全体へ寫ス *topologische Abbildung* デ $x \neq 0.0000\cdots$ ナラバ f_x ハ不動点ヲ有シナイ。

又 $x \neq s$ ナラバ $f_x \neq f_s$ 。故ニ斯カル f_x ハ全体デ $\aleph_1$ 個アル。コノ事ト定理1カラ本誌ハ終結スル。(餘談ナガラ斯カル f_x ノ全体ハソノ加群ト位相同形ニシテ且ツ同型ナル加群ヲナス)。

系1. *Cantor*-集合ヲ自ラ全体へ寫シシカモ任意ニ與ヘラレタ点ヲ他ノ任意ニ與ヘラレタ点へ寫ス *topologische Abbildung* が少クトモ一ツ存在スル。

系2. *Perfekt* ナ *nulldimensionaler Kompaktum* ヲ自ラ全体へ寫シシカモ不動点ノナイ *topologische Abbildung* が $\aleph_1$ 個存在スル。⁽⁶⁾

系3. *Perfekt* ナ *nulldimensionaler Kompaktum* ヲ自ラ全体へ寫シ、シカモ任意ニ與ヘラレタ点ヲ他ノ任意ニ與ヘラレタ点へ寫ス *topologische Abbildung* が少クトモ一ツ存在スル。

定義2. 上述ノ加群ヲ *Cantor*-加群ト呼ビ、 f_x ヲソノ *Parametertranslation* ト呼ブ。

補助定理6. *Cantor*-集合ヲ任意ノ *Kern* ヲ有スル *nulldimensionaler Kompaktum* 全体へ寫ス一意連続寫像ノ個数ハ $\aleph_1$ 個デアアル。

(6) 此ノ定理ハ *Math. Ann.* 98 (1928), 103 頁ニアリマス。但シ証明ハ又ハ違フ。

証明。前回 = 述ビタセウ = 任意ノ $\mathcal{C}$ ノ中ノ適當
 + 部分集合 $\mathcal{C}^* \rightarrow \text{homöomorph} = \text{移セル}$ 。 $\mathcal{C}$ ノ $\mathcal{C}^*$ 全体
 $\rightarrow \mathcal{C}^*$ 内ノ点ハ動かサズ = *eindeutig stetig* = 移セル。
 ソノ寫像ヲ g トスル。 $\mathcal{C}^*$ 内 = 特定ノ一点 x_0 。ヲトリ別 = 任
 意ノ一点 x ヲトリ Cantor-和群ノ Parametertranslation
 f_{x-x_0} ヲ作ル。

然ラバ $\mathcal{C}^* \ni x$ + ル任意ノ $x =$ 対シテ $gf_{x-x_0} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^*$
 全体ヘ寫ス *Abbildung* デアリ、 $gf_{x-x_0}(x_0) = x$ + ル故
 $x \neq y$ + ラバ $gf_{x-x_0} \neq gf_{y-x_0}$ 。故 = $\mathcal{C}^*$ ノ濃度ト
Abbildung gf_{x-x_0} ノ個数トハ相等シイ。然ル = $\mathcal{C}$ ノ Kern
 ヲ有スル故 $\mathcal{C}^*$ ノ $\aleph$ 集合デアアル。

從ツテ $\mathcal{C}$ ノ $\mathcal{C}^*$ 全体ヘ移ス *Abbildung* ノ個数ハ少
 クトモ $\aleph$ 個デアアル。 $\mathcal{C}$ ト $\mathcal{C}^*$ ト *homöomorph* デアルカラ
 $\mathcal{C}$ ノ $\mathcal{C}$ 全体ヘ移ス *Abbildung* ノ個数モ少クトモ $\aleph$ 個
 デアル。之ノ事ト定理ノカラ証明ハ終結スル。以上。

定理 3. *Nulldimensionaler Kompaktum*
 $\mathcal{C}_1$ ノ $\mathcal{C}_1 =$ 準同形ナル *nulldimensionaler Kompaktum*
 $\mathcal{C}_2$ 全体ヘ移ス *Abbildung* ノ個数が高々可附番ナル
 タメノ 必要十分条件ハ $\mathcal{C}_2$ が有限集合ナルコトデアアル。

証明。十分ナルコトハ定理 2 ノ十分証明ト同ジク補助
 定理 4 ヨリ明ラカデアルカラ必要ノ方ダケ証明スル。對偶ヲ
 証明スル。假 = $\mathcal{C}_2$ が無限集合ナリトセヨ。

(i) $\mathcal{C}_2$ が Kern ヲ有スル場合。

然ラバ假定ヨリ必然 $\mathcal{C}_1 \in \text{Kern}$ ヲ有スル。Kern ヲ有ス

$\sim \mathcal{T}_1$ は Cantor-集合全体へ *eindeutig stetig* = 移れる。Cantor-集合 $\mathcal{T}$ Kern $\exists$ 有する $\mathcal{T}_2$ 全体へ写す一意連続写像へ補助定理 6 = ヨリ少くとも $\aleph_1$ 個存在する。之は不合理!

(ii) $\mathcal{T}_2$ が Kern $\exists$ 有せざる場合。

$\mathcal{T}_2$ の第 1 次ノ導来集合 $\mathcal{T}_2^{(1)}$ 内 = 少くとも一ツ存在する $\mathcal{T}_2^{(1)}$ の孤立点 x をとり x の十分小さい ausgezeichnete Umgebung B を作り $B \cdot (\mathcal{T}_2^{(1)} - x) = 0$ となしめることが出来る。明らに B は P と位相同形。 $\mathcal{T}_2$ は $\mathcal{T}_1$ = 準同形ナル故少くとも一ツノ写像 f が存在して $f(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$ 。 B の f = 内する Urbild $\mathcal{A}$ とすれば $\mathcal{A}$ は $\mathcal{T}_1$ の中で孤立 (= *offen & abgeschlossen*) してキルカラ写像 f を外から一ツノマデ $\mathcal{A} \rightarrow B$ = 於いてダケ変へてモ構はない。 $\mathcal{A}$ は無限集合ナル故、補助定理 2 = ヨリ P 全体へ *eindeutig stetig* = 移す。 $P \rightarrow B$ 全体へ移す仕方へ補助定理 3 = ヨリ $\aleph_1$ 個存在する。從つて不合理!

証明終。

系. Nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_1$ = 準同形ナル nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{T}_2$ 全体へ移す *Abbildung* の個数が高々有限個ナルタメ、必要十分条件は $\mathcal{T}_2$ が只一点ヨリナル集合ナルカ $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 共 = 有限集合ナルカデアル。

証明. 十分ナルコトは明らにダケ必要ノ方ダケ。本定理ヨリ先づ $\mathcal{T}_2$ は有限集合デナケレバナラヌ。

次=、假り= $\mathcal{O}_2$ が少クトモ二点ヲ有シ $\mathcal{O}_1$ が無限集合ナリトスル。

假定カラ $\mathcal{O}_1$ ヲ $\mathcal{O}_2$ 全体へ寫ス寫像が少クトモ一ツ存在スル。ソレヲ f トスル。 $\mathcal{O}_2$ は有限集合ナル故 $\mathcal{O}_2$ ノ少クトモ一点 $x = \cup f =$ 仍ツテ $\mathcal{O}_1$ ノ無限ノ点が對應スル。ソノ x ノ Urbild ヲ A トスル。 A は $\mathcal{O}_1$ ノ中デ孤立シテキルカラ寫像 f ヲ外デハソノマデ $A =$ 於テダケ変ヘテモ差支ヘナイ。 $\mathcal{O}_2$ 内= x ノ外=一点 y ヲトル。 A へ無限集合デカラ P 全体へ移セル。 P ヲ集合 $\{x, y\} =$ 寫ス寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right) = x, (1 \leq n \leq s), f_s\left(\frac{1}{n}\right) = y, (s < n), f(0) = y$$

A 以外ノ f ト A 内ノ f_s トヲ併セテ g_s トスレバ g_s は $\mathcal{O}_1$ ヲ $\mathcal{O}_2$ 全体へ移ス寫像ヲ $g_s, (s=1, 2, \dots)$ へオ互ニ異ナル寫像デアル。之レハ不都合。

従ツテ $\mathcal{O}_2$ が只一点ヨリナル集合ナルカ $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ 共ニ有限集合ナルカデナケレバナラヌ。以上。

III. Abbildungsraum / Kompaktheit

Nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{O}$ ノ中ノ孤立点ノミカラナル Fundamentalfolge ヲ考ヘル。

茲ニ云フ Fundamentalfolge トハ集合 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ト位相同形ナルモノノ意味デアル。 $\mathcal{O}$ ノ中ニ孤立点が無限個アルトキハソノ中カラ適當ニ可附番個選

ンデ *Fundamentalfolge* が作レル。逆 = $\mathcal{F}$ / 中カラ
孤立点ノ ミカラナル *Fundamentalfolge* がアルトキ
ハ明ラカ = $\mathcal{F}$ / 中ニ孤立点が無限個存在スル。

次 = $\mathcal{F}$ / 中ノ孤立点が高々有限個ノ場合ハソノ孤立点ノ
総ヲヲ取除クト空集合 = ナルカ或ハ *Kern* が残ル。逆 = $\mathcal{F} - K$
が高々有限集合ナラバ $\mathcal{F}$ / 中ノ孤立点ハ明ラカ = 高々有限個
ナアル。

補助定理 1. 有限ナラザル $\mathcal{F}$ ハ孤立点ノ ミカラナ
ル *Fundamentalfolge* ヲ有スルカ $\mathcal{F} - K$ が高々有限集
合ナルカデアイル。

補助定理 2. *Fundamentalfolge* ヲ *Funda-*
mentalfolge 全体ヘ寫ス *Abbildungsraum* ハ *kom-*
pakt デナイ。

証明. *Fundamentalfolge* ト位相同形ナル集
合 $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス *Abbildungs-*
raum が *kompakt* デナイコトヲ証明スレバ十分デア
イル。寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル,

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad (1 \leq n \leq s), \quad f_s\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-s+1}, \quad (s < n)$$

然ラバ f_s , ($s = 1, 2, \dots$) ハ集合 $\{p \neq 0\}$ ヲ自ラ全体
ヘ寫ス寫像デアツテシカモ相異なる任意ノ p, q = 對シテ

$$\rho(f_p, f_q) \geq \frac{1}{2}$$

従ツテソノ *Abbildungsraum* ハ *kompakt* デナ
イ。以上。

補助定理3. $Kern (= \text{perfekter nulldimensionaler Kompaktum})$ $\rightarrow Kern$ 全体へ寫入 $Abbildung$ raum $\wedge$ kompakt $\nabla + \text{イ}$ 。

証明. $Kern$ トは相同形ナル $Cantor$ -集合ヲ自ラ全体へ寫入 $Abbildung$ raum が kompakt $\nabla + \text{イ}$ コトヲ証明スレバ十分ナル。寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル:

$$f_s(0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \xi_{s+1}, \dots) = 0, \xi_{s+1}, \dots$$

然ラバ $f_s (s=1, 2, \dots)$ $\wedge$ $Cantor$ -集合ヲ自ラ全体へ寫入寫像デアツテシカモ相異ナル任意ノ $p, q = \text{對シテ}$

$$\rho(f_p, f_q) \geq \frac{2}{3}$$

從ツテソノ $Abbildung$ raum $\wedge$ kompakt $\nabla + \text{イ}$ 。以上。

定理1. $Nulldimensionaler Kompaktum \mathcal{T}_1$ $\rightarrow nulldimensionaler Kompaktum \mathcal{T}_2$ $\wedge$ 中へ寫入 $Abbildung$ raum が kompakt ナルタメノ必要十分ナル條件ハ $\mathcal{T}_1$ が有限集合ナルカ或ハ $\mathcal{T}_2$ が只一点ヨリナル集合ナルカデアル。

定理2. $Nulldimensionaler Kompaktum \mathcal{T}_1$ $\rightarrow \mathcal{T}_1 = \text{準同形ナル nulldimensionaler Kompaktum}$ $\mathcal{T}_2$ 全体へ寫入 $Abbildung$ raum が kompakt ナルタメノ必要十分ナル條件ハ $\mathcal{T}_1$ が有限集合ナルカ或ハ $\mathcal{T}_2$ が只一点ヨリナル集合ナルカデアル。

証明. 両者ノ証明ヲ一緒ニヤル。

(1) 定理1ニ於ケル必要性ノ証明。

對偶ヲ云フ。假リ = $\mathcal{O}_1$ が無限集合, $\mathcal{O}_2$ が少クトモ二点ヲ有スルトスル。前節補助定理 2 = ヨリ $\mathcal{O}_1$ ハ P 全体ヘ字レ $\mathcal{O}_2$ ハ例ヘバ二点 x, y ヲ含ム。 P ヲ集合 $\{x, y\}$ = 寫ス寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right) = x, (1 \leq n \leq s), f_s\left(\frac{1}{n}\right) = y, (s < n), f_s(0) = y$$

然レバ $f_s, (s = 1, 2, \dots)$ ハ $\mathcal{O}_1$ ヲ $\mathcal{O}_2$ ノ中ヘ寫ス寫像デアツテ相異ナル任意ノ p, q = 對シテ

$$\rho(f_p, f_q) = \rho(x, y) \neq 0$$

従ツテ Folge $\{f_s\}$ ハ集積点ヲ有シナイ。之レハ不合理! 以上。

(2) 定理 2 = 於ケル必要性ノ証明

對偶ヲ云フ。假リ = $\mathcal{O}_1$ が無限集合, $\mathcal{O}_2$ が少クトモ二点ヲ有スルトスル。

(i) $\mathcal{O}_2$ が有限集合ナル場合

假定カラ $\mathcal{O}_1$ ヲ $\mathcal{O}_2$ 全体ヘ寫ス寫像 f が少クトモ一ツ存在スル。 $\mathcal{O}_1$ ハ無限集合ナル故 $\mathcal{O}_2$ ノ少クトモ一点 x = ハ f = ヨツテ $\mathcal{O}_1$ ノ無限ノ点が對應スル。 x ノ Urbild ヲ A トスレバ A ハ $\mathcal{O}_1$ ノ中ニ孤立シテキルカラ寫像 f ヲ外デハソノマデ A = 於テダケ変ヘテモ差支ヘナイ。 $\mathcal{O}_2$ 内 = x ノ外 = 一点 y ヲトル。 A ハ無限集合ガカラ P 全体ヘ移セル。 P ヲ集合 $\{x, y\}$ = 寫ス寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right) = x, (1 \leq n \leq s), f_s\left(\frac{1}{n}\right) = y, (s < n), f(0) = y$$

A 以外ノ f ト A 内ノ f_s トヲ併セテ g_s トスレバ g_s ,
 $(s=1, 2, \dots)$ ハ $\mathcal{F}_1$ ヲ $\mathcal{F}_2$ 全体ヘ移ス寫像デアツテ相異
 + $\checkmark$ 任意ノ $p, q =$ 對シテ

$$\rho(g_p, g_q) \geq \rho(x, y) > 0$$

従ツテ Folge $\{g_s\}$ ハ集積点ヲ有シナイ。之レハ
 不合理! 以上。

(ii) $\mathcal{F}_2$ が孤立点ノ ミカラナル *Fundamentalfolge*
 ヲ有スル場合。

$\forall$ *Fundamentalfolge* $\gamma B = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$,
 B ノ Urbild ヲ夫々 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$
 トスル。 $A_n, (n=1, 2, \dots)$ ハ $\mathcal{F}_1$ ノ 中デ孤立シテキル
 カラ寫像 f ヲ A ノ 外デハ $\forall$ ノ マデ A ヲ B 全体ヘ寫ス所ニ於
 テダケ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ ナル如ク 決ヘテモ差支
 ヘナイ。 A ヲ *Fundamentalfolge* $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$
 全体ヘ移ス。

然ルニ *Fundamentalfolge* $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$
 ヲ *Fundamentalfolge* $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ 全
 体ヘ寫ス *Abbildungsraum* ハ補助定理2ニ依ツテ *kom-*
pakt デナイ。之ハ不合理! 以上。

(iii) $\mathcal{F}_2 - K_2$ が高々有限集合ナル場合 (K_2 ハ $\mathcal{F}_2$
 ノ Kern)

K_2 ノ $f =$ 關スル Urbild ヲ A トスレバ A ハ $\mathcal{F}_1$ ノ 中
 デ孤立シテキルカラ寫像 f ヲ A ノ 外デハ $\forall$ ノ マデ A ヲ K_2
 全体ヘ寫ス所ニ於テダケ決ヘテモ差支ヘナイ。 A ハ $\mathbb{N}$ 集合ヲ

アルカラ Kern ヲ有スル nulldimensionaler Kompaktum デアル。従ツテ A ハソノ Kern K_1 全体へ移セル。

然ルニ Kern K_1 ヲ Kern K_2 全体へ寫ス Abbildungsraum ハ補定定理 3 = 仍ツテ kompakt ナイ。之ハ不合理! 以上。

(3) 定理 1 = 於ケル十分性ノ証明。

$\mathcal{F}_2$ が只一点ノ集合ナラ Abbildungsraum モ亦只一点ノ空間デ kompakt ナコトハ言フモ愚カ。

次ニ $\mathcal{F}_1$ が有限集合ナルトキ。 $\mathcal{F}_1$ ノ点ヲ $x_1, \dots, x_k$ トシ $f_m(x_i) = y_i^m$, ($i=1, \dots, k$) トスル。
 $y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^m, \dots$ ハ少クトモ一ツノ集積点 y_1 ヲ有ス。 $y_1 =$ 收斂スルソノ部分列ヲ $y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^m, \dots$ トスル。
 $y_2^1, y_2^2, \dots, y_2^m, \dots$ ハ少クトモ一ツノ集積点 y_2 ヲ有ス。 $y_2 =$ 收斂スルソノ部分列ヲ $y_2^1, y_2^2, \dots, y_2^m, \dots$ トスル。
 $y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^m, \dots$ ハ少クトモ一ツノ集積点ヲ有ス。 ソノ点ヲ y_k トスル。 $y_k =$ 收斂スルソノ部分列ヲ $y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^m, \dots$ トスル。

然ラバ $y_k f^1(x_i), y_k f^2(x_i), \dots, y_k f^m(x_i), \dots$ ハ $y_i =$ 收斂スル, ($i=1, \dots, k$)。 今 $f(x_i) = y_i$, ($i=1, \dots, k$) トスレバ其故 $\lim_{m \rightarrow \infty} y_k f^m = f$ 。 従ツテ Abbildungsraum ハ kompakt デアル。 以上。

(4) 定理 2 = 於ケル十分性ノ証明。

$\mathcal{F}_2$ が只一点ノ集合ナラ *Abbildungsraum* ε 亦只一点ノ空間ナル。 $\mathcal{F}_1$ が有限集合ナラ ソレニ準同形ナル $\mathcal{F}_2$ ε 亦有限集合ナル故 *Abbildungsraum* ε 從ツテ又有限集合トナル。何レノ場合モ *kompakt* ナコトハ自明。

証明終

(附言) 前回及ビ今回ニ述ベタ殆ソド總テノ *Abbildung* ニ關スル定理ハ寫ス *nulldimensionaler Kompaktum* $\mathcal{F}_1$ ノ方ヲ一般ノ *Kompaktum* ニマデ(結果ハ其ノ儘カ)擴張シテ言ヘルノデアリマスガ煩雜ニナリマスノデ一般ノ場合ハ後デ一括シテ此ノ次廻リニ書ク積リデアリマス。

(昭和十二年二月十一日 書終ル)