



Title	完閉群ニ於ケル線状移動可能微分演算子
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 123, p. 87-91
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74475
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

550. 完閉群ニ於ケル線狀移動可能 微分演算子

吉田 耕 作 (阪大)

境界値問題

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y, \quad y(0) = y(1)$$

ト Fourier 級数論トノ密接ナ關係ニ對シテ次ノ如キ群論的解釋ガ許サレル。

1. G ヲ r -parameter, compact, connected ナ Lie 群ノ一ツノ parameter 群トスル。 G ノ無限小微分演算子全体ハ所謂 G ノ Lie 環 $\mathcal{G}$ ヲ作ル。 $\mathcal{G}$ ノ base ヲ $X_1, X_2, \dots, X_r$ トスル。 G ノ各要素 x = 對シテ X ト共ニ $xXx^{-1} \in \mathcal{G}$ = 属スル。 X カラ xXx^{-1} = 移ル = ハ G ノ adjoint group = ヲツテ induce サレタ linear transformation in $\mathcal{G}$ ヲ施シテ移ル譯デアル。

今 G ノ連続ナ行列表現 $\varrho: M(x) = \|m_{ij}(x)\|$ ヲ考ヘル。準同型寫像 $G \rightarrow \varrho =$ ヲツテ Lie 群 G 及ビ Lie 群 ϱ ノ Lie 環 $\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varrho$ ノ間ニ線狀準同型寫像 $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\varrho$ ガ induzieren サレル。コノトキ $X_i \rightarrow M_i$ トスレバ

$$X_i M(x) = M_i M(x)$$

ガ成立スル。

コノ

$$X_i M(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(e^{tX_i} x) - M(x)}{t}$$

= シテ且ツ $M_i M(x)$ ハ infinitesimal matrix M_i
 ト行列 $M(x)$ ト行列積ヲ意味スル。operator X_i, M_i
 ノ linearity カラ逐次 =

$$X_i X_j M(x) = M_i M_j M(x), X_i X_j X_k M(x) = M_i M_j M_k M(x)$$

等ヲ得ル。

ヨツテ任意ノ Polynomial $P =$ 對シテ

$$(1) P(X_1, X_2, \dots, X_r) M(x) = P(M_1, M_2, \dots, M_r) M(x)$$

ヲ得ル。

備テ $\mathcal{O}_f$ ハ完閉デカラ, locally = ハ abelian +
 Lie 群 $\mathcal{O}_f$ ト準單純ノ Lie 群 $\mathcal{O}_2$ ト直積トナル。 $\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_2$
 ノ Lie 環ノ base ヲ夫々 $X_1, X_2, \dots, X_s$, 及ビ
 $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_p$ トスル。若シ $\epsilon > 0$ ナラバ (即チ
 $\mathcal{O}_f$ ノ核心ガ discrete デナイナラバ)

$$D = P(X_1, X_2, \dots, X_s)$$

ノ形ノ微分演算子 D ハ明カニ移動可能 (translatable)
 デアル:

$$(2) D y = y D, \quad y \in \mathcal{O}_f$$

故ニ $D_{\mathcal{O}} = P(M_1, M_2, \dots, M_s)$ ナル行列ハ $\mathcal{O}$ ノ全テノ
 行列ト可換デアリ且ツ (1) = ヨリ

$$D M(x) = D_{\mathcal{O}} M(x)$$

ガ成立スル。

仍ツテ若シモ表現 $\mathcal{O}$ ガ既約ナラバ上ノ可換性 = ヨリ

$D_\alpha = \lambda E$ (E 単位行列) — *Schur's lemma*.

トナラナケレバナラナイ。コノトキニハ $M(x)$ ノ成分 $m_{ij}(x)$ カ全テ微分演算子 D ノ, 固有値入ニ属スル固有函数トナルヲ示ス。

今モシ逆ニ $f(x)$ ヲ D ノ固有函数トスレバ

$$Df(x) = \lambda f(x)$$

従ツテ (2) = ヨリ, 任意ノ $y \in \mathcal{O}_f$ 対シ

$$\begin{aligned} Df(yx) &= Dyf(x) = yDf(x) = y\{\lambda f(x)\} \\ &= \lambda f(yx) \end{aligned}$$

カ成立スル。即チ $f(x)$ ト共ニ $f_y(x) = f(yx)$ モ亦固有値入ニ属スル D ノ固有函数デアアル。コノコトカラ, 若シ $\lambda \in \underline{D}$ ノ固有値入ノ multiplicity カ有限ナラバ, 良ク知ラレタ *Peter-Weyl* ノ論法ニヨリ $f(x)$ カ $\mathcal{O}_f$ ノ或連続表現 α' ノ行列成分ナルコトガワカル。

尚テ *Peter-Weyl* ノ論法ニヨレバ, 完閉群 $\mathcal{O}_f$ ノ連続表現ハ *unitary* 表現ト同値ナリ (従ツテ完全可約) 且ツ $\mathcal{O}_f$ ノ互ニ同値ナキ既約 *unitary* 表現全体ヲトルト其ノ行列成分ハ $\mathcal{O}_f$ ノ上ノ *unitary orthogonal* ナ完全函数系ヲ作ル。故ニ

定理. $\lambda > 0$ 且ツ D ノ *point spectre* ノ固有値ノ *multiplicity all finite* ナラバ

i) D ノ固有函数ハ $\mathcal{O}_f$ ノ既約 *unitary* ナ連続表現ノ行列成分然シテ斯ルモノノミヨリ成リ

ii) 之等ノ固有函数ハ $\mathcal{O}_f$ ノ上ノ *unitary orthogonal*

ト完全函数系ヲ作ル。

冒頭ニ述ベタ Fourier type 1 operator $\frac{d}{dx}$ ハ 1
ヲ法トスル実数ノ加法群 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ テ考ヘテキレバヨイ。

Laplace operator モ同シマシラ考ヘルコトが出来
ル。

2. $\Delta = 0$ 即チ $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ が単純トキニハ上ノ
如キ operator D ハ存在シナイ。然シ H. Casimir (Ams.
Proc. 1931, p. 844) ニヨレバコノトキニハ

$$G = \sum_{\lambda, \mu=1}^r g^{\lambda\mu} D_\lambda D_\mu$$

ナル operator ハ translatable デアリ且ツ上定理ノ
 D ノ代リニ之ノ G ヲ使フコトが出来ル。コノ $g^{\lambda\mu}$ ハ

Cartan 1 non-singular quadratic form

$$\sum_{\lambda, \mu=1}^r g_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu \text{ ノ係数 } g_{\lambda\mu} \text{ ノ contragredient}$$

Tensor デアル。 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ ノ structure constant ヲ
使ハル

$$g_{\lambda\mu} = \sum_{\rho, \sigma=1}^r C_{\lambda\rho\sigma} C_{\mu\sigma\rho}.$$

斯クテ一般ニ D type ノ operator ト Casimir-
operator G トノ Polynomial ヲ考ヘルバ、 $\mathcal{O}_1$ ノ表
現ニ attach シタ無限ニ多クノ線形移動可能微分演算子ガ
得ラレルノデアリ。 Casimir operator G ハ巧妙ト有
用トモノデアアルガ、 $\Delta > 0$ ノトキニハ D type 1 ope-

rator / 方がズット簡單 + コトヲ注意セラレタイ。

上ノ考ヘテ O_f = ヨツテ *transitive* = 動かサレル
homogeneous compact space / 上ノ函数系ノ議論
ニ押進メテ、種々ノ *classical* + 境界値問題ノ群論的解釋
モナサレ得ルガアリマセウ。