



Title	線状函數方程式ニ就イテ（Ⅱ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 123, p. 93-98
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74477
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

552 線状函数方程式 = 就イテ(II)

北 川 敏 男 (阪大)

4. Schürer / 定理ノ一擴張、茲デハ、 $f(x)$ ト Γ
ト = 適當ノ假定ヲ設ケルコト = 依リ、函数方程式

$$(1) \quad \Gamma f(x) = 0$$

= ツイテ、無限次微分方程式 = 於ケル Schürer / 定理
ノ *Analogy* ヲ求メマシ。其ノタメ次ノ規約等が必要デ
アル。

規約1. 函数集合 $(B^{(\infty)})$ トハ、凡テノ自然数 n = ツイ
テ常 = $\alpha^n f(x)$ が存在シテ (A) = 属スルマシナ $f(x) \in (A)$
ノ全体ヲイフ。

規約2. $Y \supset X$ ノ任意ノ真部分集合⁽¹⁾ トシ $f_Y(x)$ ヲ次

(1) 任意トイツテモ X ノ或ルキマツタ *subsets* ノ *system* デアル。ストヘ
バ X ヲ全直線 = スレバ X ハ有界可測ナル集合 = トル。

、如ク定義スル。

$$(4.01) \quad \begin{aligned} f_Y(x) &= f(x), & \text{for } x \in Y \\ &= 0 & \text{for } x \in X-Y \end{aligned}$$

然ルトキ各 $f(x) \in (A)$ = 對シテ $f_Y(x) \in (A)$ デアツテ
 $\{f_Y(x)\}$ ハ *normalised Banach space* ヲツクル
 トスル。Yノ Norm ヲ $\|f_Y(x)\|_Y$ 又ハ單 = $\|f(x)\|_Y$ デ
 表ハス。

規約3. $f(0) = 0$ トナルヲナシ $f(x) \in (A)$ ノ全体ヲ
 以ツテ (B) トシ、特 = $\mathcal{D}f(x)$ モ存在シテ $\mathcal{D}f(x) \in (A)$ ナル
 如キ $f(x) \in (B)$ ノ全体ヲ (C) トスル。

規約4. 函数空間 (A) ノ完備性: $f_n(x) \in (A)$ ($n =$
 $1, 2, \dots$) が任意ノ Y = 於テ Norm $\|f_n(x)\|_Y =$
 關シテ完備デアルトキ = ハ、 $f(x) \in (A)$ が存在シテ任意ノ Y
 = 於テ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_Y = 0$$

ヲ満足スル。コレヲ $f_n(x)$ ハ $f(x) = \text{converge}$ スル
 トイフ。

例. 全直線デ定義セラレ任意ノ有限區間ヲ L^2 = 属スル
 様ヲ $f(x)$ ノ全体ヲ考ヘルト

$$\|f(x)\|_Y = \sqrt{\int_Y |f(x)|^2 dx}$$

トオクトキ規約 (2) ト (4) トヲ満足スル。

規約5. $(B^{(\infty)})$ = 属シ且任意ノ真部分集合 Y = 關シY

=無関係ナ同ジ入デ

$$(4.02) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\mathcal{D}^n f(x)}{\lambda^n} \right\|_Y < 1$$

ヲ満足スル $f(x)$ ノ全体ヲ $(E(\lambda))$ デ表ス。

規約6. $f_n(x)$ 及ビ $f(x)$ ハ $(B^{(\infty)})$ = 属スルトスル。
 λ ヲ一定ノ複素数トスル。 $\varepsilon > 0$ 、真部分集合 Y ヲ如何ニ與
 ε 毎ニ $n(\varepsilon, Y)$ が定マリ $n > n(\varepsilon, Y)$ ナルトキニハ、
 スベテノ $p = 0, 1, 2, \dots$ = 關シテ

$$(4.03) \quad \left\| \frac{\mathcal{D}^p (f_n(x) - f(x))}{\lambda^p} \right\|_Y < \varepsilon$$

ナラシメウルトキ、 $\{f_n(x)\}$ ハ $(E(\lambda))$ = 於テ $f(x)$ = 收
 斂スルトイフ。

(注意) 定義カラ次ノコトが明テカデアル。 $|\lambda_1| \geq |\lambda|$ ナ
 ラバ 1°. $(E(\lambda_1)) \supseteq (E(\lambda))$ 2°. $(E(\lambda))$ ニ收斂ナラバ
 $(E(\lambda_1))$ = 於テモ亦然リ。 3°. $f(x) \in (E(\lambda))$ ナラバ任
 意ノ自然数 p = ツイテ $\mathcal{D}^p f(x) \in (E(\lambda))$ 。

定義1. $\{f_n(x)\}$ が $(E(\lambda))$ = 於テ $f(x)$ = 收斂シ、
 $I' f_n(x)$ が存在スルナラバ $I' f(x)$ ハ存在シ且ツ常ニ $I' f_n(x)$
 ハ $I' f(x)$ = 收斂スルトスル。然ルトキ I' ハ $(E(\lambda))$ = 於
 テ連続デアルトイフ。

以上ノ準備ノチ、吾々ノ証明セントスル拡張サレタ
 Schürerノ定理ハ次ノ如ク言ヒ表ハサレル:

定理5. $f(x)$ ヲ函数方程式 (1) ノ解トシ、 $f(x) \in (E(\lambda_0))$
 トスル。 I' が $(E(\lambda_0))$ = 於テ連続ナリトスレバ

$$S_r(x, t; f) = S_r(x, 0; f)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_r} \frac{j(\lambda x)}{G(\lambda)} \Gamma_0(L_\lambda(f(x))) d\lambda$$

= 於テ $|\lambda| > |\lambda_0|$ ナル如キ点 = 於ケル residues ハ悉ク
零デアイル。即チ $\mathbb{C}_r$ が $\mathbb{C}^{(\lambda_0)}$ 内 $|\lambda| \leq |\lambda_0|$ ノ内部 = 含ムカ
ヤリソレハ $\mathbb{C}_r$ = 無関係ナリ =

$$S_r(x, t; f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}^{(\lambda_0)}} \frac{j(\lambda x)}{G(\lambda)} \Gamma_0(L_\lambda(f(x))) d\lambda$$

デアイル。

証明. 今、 $g_n(x)$ ノ次ノ如ク定義スル。

$$(4.04) \quad g_n(x) = - \sum_{\nu=0}^n \frac{\mathcal{D}^\nu f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

然ルトキ明カ = $g_n(x) \in (E(\lambda_0))$ デアイル。而シテ

$$(4.05) \quad \left\| \frac{\mathcal{D}^p(g_m(x) - g_n(x))}{\lambda_0^p} \right\|_Y = \left\| \frac{1}{\lambda_0^p} \sum_{\delta=n+1}^m \frac{\mathcal{D}^{p+\delta} f(x)}{\lambda^{\delta+1}} \right\|_Y$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{\delta=n+1}^m \left| \frac{\lambda_0(1-\varepsilon)}{\lambda} \right|^\delta$$

依ツテ特 = $p=0$ トオイテ上式ヲミレバ, (A) ノ完備性カヲ
任意ノ真部分集合 $Y =$ ツイテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n(x) - g(x)\|_Y = 0$$

ヲミヌス $g(x) \in (A)$ カアイル。ヨツテ

$$(4.06) \quad g(x) = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}^\nu f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

然レトキ $\mathcal{D}^{(p)} g_n(x)$ ハ $\mathcal{D}^{(p)} g(x)$ (ソノ存在モツカル)
 = 収斂シ

$$\mathcal{D}^{(p)} g(x) = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}^{p+\nu} f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

ヲ與ヘラレル。茲ニ明カニ

$$\mathcal{D} g(x) = \lambda g(x) + f(x)$$

ナル關係ガアル。

$\mathcal{D} g(x) \in (A)$ ガアルケレドモ未ダ $g(x) \in (C)$ ハイ
 へナイ。

ソノタメニハ

$$g_1(x) = g(x) - g(0) j(\lambda x)^{(1)}$$

ヲ考ヘレバ $g_1(x) \in (C)$ トナル。ヨツテ

$$(4.07) \quad \mathcal{L}_\lambda(f(x)) = g(x) - g(0) j(\lambda x)$$

トナル。 $\{g_n(x)\}$ ハ $E(\lambda_0)$ = 於イテ $g(x)$ = 収斂スル
 ノデアルカラ、 $E(\lambda_0)$ = 於ケル Γ ノ連続性ニヨツテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(g_n(x)) = \Gamma\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right)$$

ガアリ、他方 Γ ト $\mathcal{D}$ トノ交換可能カラ

$$\begin{aligned} \Gamma(g_n(x)) &= \Gamma\left(- \sum_{\nu=0}^n \frac{\mathcal{D}^\nu f(x)}{\lambda^{\nu+1}}\right) = - \sum_{\nu=0}^n \frac{\mathcal{D}^\nu \Gamma f(x)}{\lambda^{\nu+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

依ツテ

$$\Gamma(g(x)) = 0, \quad \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = -g(0) G(\lambda)$$

(1) $j(0) = 1$ ト假定スル。

故 $= \mathbb{C}_\lambda \ni \lambda \ni$ 中心トスル 充合小サナ 円トスルトキ

$$S_{\mathbb{C}_\lambda}(x, t; \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_\lambda} \frac{j(\lambda x)}{G(\lambda)} G(\lambda) d\lambda = 0.$$

コレカラ直チニ吾々ノ証明スベキ定理カ得ラレル。