



Title	Nulldimensionaler Kompaktum / Abbildungstheorie (其ノ三)
Author(s)	中澤, 武雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 123, p. 98-106
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74478
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

553. Nulldimensionaler Kompaktum / Abbildungstheorie, (其ノ三)

中 澤 武 雄 (東京大学)

前回ノ續キデアリマス。

Kompaktum = 関スル Homöomorphiesatz ト
Fixpunktsatz ハ Topologie 多年ノ懸案デアツテ極
ク特殊ノ場合⁽¹⁾ヲ除イテ一般ニハ未ダ解カレテキナイ。以下ニ
私ハ abzählbarer Kompaktum / Homöomor-
phiesatz ト nulldimensionaler Kompaktum
ノ Fixpunktsatz ヲ述ベル。

之レヨリソレモ極ク特殊ノ場合デアリ、方法モ特殊ノ方

-
- (1) Fläche ノ場合ハ両者トモ解決ガミ。Homöomorphiesatz
ノオハ例ヘハ中村: 位相幾何学 (岩波), 定理 44。Fix-
punktsatz ノオハ Nielsen, Geschlossene zweiseitige
Fläche, Acta. Math. 50, 53。猶 Projektionspektrum
ノ Homöomorphiesatz ハ單ナル換言ニ外ナラス。

法デアルカラル次元ヲ解決スル何等ノヨスガニハナラナイ
ケレドモ些カ問題発生ノ由來ト將來ヘノ希望ヲ述ベテ迄テ
アル。

I. Homöomorphiesatz

補助定理 1. ニツ、abzählbarer Kompaktum
 A, B カアリ、 A ノ頂点ノ次数カ B ノ頂点ノ次数ヨリ小ナリ
トスル。然レトキ B ノ適當ナ部分集合 A^* ガトレテ A^* ノ頂
点ノ次数ト個数カ夫々 A ノ頂点ノ次数ト個数ニ等シク且 A^* ガ
 B 内ニ於テ孤立シテ居ル(換言スレバ $\rho(A^*, B - A^*) > 0$)
如クスルコトガデキル。ユノ A^* ノコトヲ A ノ B 内ニ於ケル
ausgezeichnetes Bild ト呼ブコトニスル。

証明。 A ノ頂点ノ次数ヲ α 、個数ヲ n トスル。假定オ
ラ $B^{(\alpha)}$ ハ有限ナラカル abzählbarer Kompaktum
ナル。有限ナラカル abzählbarer Kompaktum ハ
無限個ノ孤立点ヲ有ス。従ツテ $B^{(\alpha)}$ ノ中カラ任意ニ n 個ノ
孤立点 $x_1, \dots, x_n$ ヲ取り出ス。 $\rho(x_i, B^{(\alpha)} - x_i) = \varepsilon_i$
トシ B ニ属スル x_i ノ ε_i -ausgezeichnete Umge-
bung ヲ作り、($i = 1, \dots, n$)、 $\cup$ ノ総和ヲ A^* トス
ル。然ラバ A^* ノ頂点ハ $x_1, \dots, x_n$ デアアルカラ次数ハ
 α 、個数ハ n 、従ツテ A ノ頂点ノ次数ト個数ニ一致スル。
シカモ A^* ハ B 内ノ有限個ノ ausgezeichnete Um-
gebung ノ和デアアルカラ明ラカニ B 内ニ於イテ孤立シ
テキル。

定理1 (同形定理). ニツ、abzählbarer Kompaktum A, B が位相同形ナルタメニ必要十分ナル條件ハ両者ノ頂点ノ次数ト個数カソレゾレ相等シキコトデアール。

証明. (i) 必要ナルコト。

$A^{(\alpha)}$ ト $B^{(\alpha)}$ が寫像 $f =$ 仍ツテ位相同形ナルトキハ $A^{(\alpha+1)}$ ト $B^{(\alpha+1)}$ モ $f =$ 仍ツテ位相同形デアール。極限順序数 $\alpha =$ 対シテ $\alpha > \beta$ ナル總テノ $\beta =$ 対シテ $A^{(\beta)}$ ト $B^{(\beta)}$ が $f =$ 仍ツテ位相同形ナルトキハ $\prod_{\beta < \alpha} A^{(\beta)} = A^\alpha$ ト $\prod_{\beta < \alpha} B^{(\beta)} = B^\alpha$ モ $f =$ 仍ツテ位相同形デアール、(以上ヲ帰納法終リ)。從ツテ A ノ頂点ノ次数ヲ α 、個数ヲ n トスレバ $A^{(\alpha)}$ ト $B^{(\alpha)}$ が位相同形ナルコトヨリ $B^{(\alpha)}$ ハ n 個ノ点ノ集合デアール。從ツテ B ノ頂点ノ次数モ α ナ個数モ n デアール。以上。

(ii) 十分ナルコト。

次数 $\alpha =$ 閉スル帰納法デアール。 $\alpha = 0$ ナルトキハ両者共有限集合デアールカラ個数相等シケレバ位相同形デアール。次ニ $\alpha > \beta$ ナル總テノ $\beta =$ ツイテ成立ツトスル。 A ノ頂点ヲ $x_1, \dots, x_n$, B ノ頂点ヲ $y_1, \dots, y_n$ トシ A, B ヲ次ノ様ニ分割スル:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n, A_i \ni x_i, \bar{A}_i = A_i, (i = 1, \dots, n), i \neq j \text{ ナラバ } A_i \cdot A_j = 0,$$

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_n, B_i \ni y_i, \bar{B}_i = B_i, (i = 1, \dots, n), i \neq j \text{ ナラバ } B_i \cdot B_j = 0.$$

從ツテ A_i ト B_i カ位相同形, ($i=1, \dots, n$) ナルコトガ
云ヘレバヨイ。代表的 = A_1 ト B_1 = ツイテマル。 $A_1 \supset A$, B_1
 $\supset B$, $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}$ トカク。

O = 收斂スル ε_ν ヲトル。 A = 關スル $\mathcal{A}$ ノ ε_1 -ausgezeichnete Umgebung $\supset U_1$, $A - U_1 = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1$ ノ B 内
ニ於ケル ausgezeichnetes Bild $\supset \mathcal{F}_1^*$, $B - \mathcal{F}_1^* = B_1$
トスル。 B_1 = 關スル $\mathcal{B}$ ノ ε_2 -ausgezeichnete Umge-
bung $\supset U_2$, $B_1 - U_2 = \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ ノ U_1 内ニ於ケル ausgezei-
chnetes Bild $\supset \mathcal{F}_2^*$, $U_1 - \mathcal{F}_2^* = A_2$ トスル。 A_{2m} = 關
スル $\mathcal{A}$ ノ ε_{2m+1} -ausgezeichnete Umgebung $\supset$
 U_{2m+1} , $A_{2m} - U_{2m+1} = \mathcal{F}_{2m+1}$, $\mathcal{F}_{2m+1}$ ノ U_{2m} 内ニ於ケ
ル ausgezeichnetes Bild $\supset \mathcal{F}_{2m+1}^*$, $U_{2m} - \mathcal{F}_{2m+1}^* = B_{2m+1}$
トスル。 B_{2m+1} = 關スル $\mathcal{B}$ ノ ε_{2m+2} -ausgezeichnete
Umgebung $\supset U_{2m+2}$, $B_{2m+1} - U_{2m+2} = \mathcal{F}_{2m+2}$, $\mathcal{F}_{2m+2}$
ノ U_{2m+1} 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild $\supset \mathcal{F}_{2m+2}^*$,
 $U_{2m+1} - \mathcal{F}_{2m+2}^* = A_{2m+2}$ トスル。

然ラバ $A = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2^* + \mathcal{F}_3 + \dots + \mathcal{A}$, $B = \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3^* + \dots$
 $+ \mathcal{B}$ ト夫々閉集合ノ直和 = 分解デキ帰納法ノ假定 = ヨリ
 $\mathcal{F}_\nu$ ト $\mathcal{F}_\nu^*$ ハ位相同形デアマル。シカモ

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2\nu-1} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2\nu}^* = \mathcal{A}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2\nu-1}^* = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2\nu} = \mathcal{B}$$

ナル故 A ト B ハ位相同形デアマル。 (証明終リ)

定義1. ノカラ任意ノ順序数 α 迄ノ集合ヲ位相化スル。

β カ孤立順序数ナラ $U(\beta) = \beta$, 極限順序数ナラ $\gamma < \beta + \nu$

任意ノ孤立順序数 γ カラ β 迄ノ集合ヲ $U(\beta)$ トスル。之レデ正則ト位相集合ニナル。之ノ集合ガ第一可附番性公理ヲ満足スルコト、第二可附番性公理ヲ満足スルコト、計量可能ナルコトハ何レモ同値デ α ガ可附番順序数ナルコトガソノ必要ト分條件デアル。

ソコデ α ガ可附番順序数ナルトキ之レヲ *wohlgeordneter Kompaktum* ト呼ビ記号ヲ $K(\alpha)$ トカク。明ラカ $=$ *abzählbarer Kompaktum* ノ一種デアアル。

補助定理 2. $K(\omega^\alpha \cdot n)$ ノ頂点ノ次数ハ α デ個数ハ n デアル。

証明. $K(\omega^\alpha \cdot n) = \{1, \dots, \omega^\alpha\} + \{\omega^{\alpha+1}, \dots, \omega^\alpha \cdot 2\} + \dots + \{\omega^\alpha \cdot (n-1) + 1, \dots, \omega^\alpha \cdot n\}$ ト分割スレバ括弧内ノ各々ハ位相同形デアルカラ $\{1, \dots, \omega^\alpha\}$ 即チ $K(\omega^\alpha)$ ノ頂点ガ ω^α 唯一ツデ次数ガ α ナルコトヲ証明スレバ十分デアル。帰納法ニ依ル。 $K(\omega^1)$ ハノミノ集合デアルカラ明ラカニ成立ツ。 α ガ孤立順序数ナラバ $K(\omega^\alpha) = K(\omega^{\alpha-1} \cdot \omega)$ ナル故 $K(\omega^\alpha)^{(\alpha-1)} = \{\omega^{\alpha-1}, \omega^{\alpha-1} \cdot 2, \dots, \omega^{\alpha-1} \cdot n, \dots, \omega^{\alpha-1} \cdot \omega\}$ 。従ッテ $K(\omega^\alpha)^{(\alpha)} = \omega^\alpha$ 。 α ガ極限順序数ナラバ $K(\omega^\alpha)^{(\alpha)} = \prod_{\beta < \alpha} K(\omega^\alpha)^{(\beta)} = \prod_{\beta < \alpha} K(\omega^\beta \cdot \omega^{\alpha-\beta})^{(\beta)} = \prod_{\beta < \alpha} \{\omega^\beta, \omega^\beta \cdot 2, \dots, \omega^\beta \cdot \omega^{\alpha-\beta}\} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \{\omega^\beta, \omega^\beta \cdot 2, \dots, \omega^\beta\} = \omega^\alpha$ 。

— 以上 —

定理 2. *Abzählbarer Kompaktum* A ノ頂点ノ次数ヲ α 、個数ヲ n トスレバ A ハ $K(\omega^\alpha \cdot n)$ ト位相同

形デアル: (A ハ位相的変形 = 仍リ整列集合 = 直セル)。

証明. 定理 1 ト補助定理 2 ノ直接ノ歸結デア
ル。

(附言) (i) 本節ノ所論ハ大塚繁孝 5 卷ノ号ノ拙文ト重複シ
テ居リマス。アテラデ証明ヲ略シマシタノデコ
チラヘ書キマシタ。

(ii) *perfekt* + *nulldimensionaler Kompak-*
tum ガ悉ク *homöomorph* ナコトハ明ラカデ
アリマスガ *perfekt* デモナク *abzählbar* デ
モナイ *nulldimensionaler Kompaktum* ノ
Homöomorphiesatz ハ條件ガ複雑致シマシテ
面白クアリマセン。

II. Fixpunktsatz

定理 I (不動点定理). *Nulldimensionaler Kom-*
paktum $\mathcal{K}$ フ自ラ全体ヘ寫ス一義連続寫像ガ少クトモ一
ツノ不動点ヲ有スルタメニ必要十分ナル條件ハ $\mathcal{K}$ ガ頂点只
一ツナル *abzählbarer Kompaktum* ナルコトデア
ル。

証明. (i) 必要ナルコト。

(i) $\mathcal{K}$ ガ Kern ヲ有スルナラバ

ソノ Kern ヲ K トシ $\frac{1}{2} \delta(K) = \varepsilon$ トシ N_ε ノ次
元ガ 0 ナル如キ $\mathcal{K}$ ノ ε -Überdeckung, Element,

中 K は *nicht fremd* + 任意ノーツヲ $\mathcal{F}_1$ トシ
 $\mathcal{F} - \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ トスル。シカラバ $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{F}_2 \in \text{共} = \text{Kern}$ ヲ有
スル *nulldimensionaler Kompaktum* ナリ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$,
 $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = 0$ 。準同形定理 = 仍リ $\mathcal{F}_1$ ハ $\mathcal{F}_2$ 全体ヘ, $\mathcal{F}_2$ ハ
 $\mathcal{F}_1$ 全体ヘ写レル。之レハ $\mathcal{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス一意連続寫像
デシカモ不動点ガナイ。

(ii) $\mathcal{F}$ ガ $n (\geq 2)$ 個ノ頂点ヲ有スル *abzählbarer Kompaktum* ナラバ

ソノ頂点ヲ $x_1, \dots, x_n$ トシ $\frac{1}{2} \min_{i \neq j} \rho(x_i, x_j) = \varepsilon$
トシ $\mathcal{F} = \text{開スル } x_i \text{ ノ } \varepsilon\text{-ausgezeichnete Umgebung}$
ヲ $\mathcal{F}_i(x_i)$ トシ, ($i = 1, \dots, n-1$), 残りヲ $\mathcal{F}_n(x_n)$ ト
スル。シカラバ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(x_1) + \mathcal{F}_2(x_2) + \dots + \mathcal{F}_n(x_n)$ ト
分割デキル。準同形定理 = ヨリ $\mathcal{F}_1(x_1)$ ハ $\mathcal{F}_2(x_2)$ 全体ヘ,
 $\mathcal{F}_2(x_2)$ ハ $\mathcal{F}_3(x_3)$ 全体ヘ, $\dots$, $\mathcal{F}_n(x_n)$ ハ $\mathcal{F}_1(x_1)$ 全
体ヘ写レル。之ハ $\mathcal{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス一意連続寫像デシカ
モ不動点ガナイ。

従ツテ $\mathcal{F}$ ガ頂点唯一ツナル *abzählbarer Kompaktum* ナルコトが必要デアアル。以上。

(2) 十分ナルコト。

$\mathcal{F}$ ノ頂点ヲ x トスレバ $\mathcal{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス如何ナル
一意連続寫像 = 自シテモ x ハ不動点デアアル。何者, 若シ
 $f(x) = y, x \neq y$ トスレバ $\frac{1}{2} \rho(x, y) = \varepsilon$ トレバ
 ε -ausgezeichnete umgebung ヲ $U(y)$ トスル。寫
像 f ノ連続性ヨリ x ノ十分小ナル ausgezeichnete

umgebung $U(x)$ が存在シテ $f(U(x)) \subset U(y)$. 従ッテ
 $f^{-1}(U(y))$ / Urbild $\cap U(x)$ を含マナイ。

従ッテ 今 $f^{-1}(U(y)) = B$, $f^{-1}(f^{-1}(U(y))) = A$, x の
 次数 α トスレバ $B^{(\alpha)} = x$, $A^{(\alpha)} = \emptyset$, 而モ $f(A) = B$.
 之レハ準同形定理ヨリ矛盾デアル。 (証明終リ)

定理 2. Abzählbarer Kompaktum $\mathcal{K}$ ヲ自ラ
 全体へ寫ス topologische Abbildung ガ少クトモ一
 ツノ不動点ヲ有スルヌメ = 必要十分ナル條件ハ $\mathcal{K}$ ノ頂点ガ
 只一ツナルコトデアル。

証明. $\mathcal{K}$ ガ n (≥ 2) 個ノ頂点ヲ有スルナラバソノ
 頂点ヲ $x_1, \dots, x_n$ トシ $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1(x_1) + \dots + \mathcal{K}_n(x_n)$
 ト分割シ $\mathcal{K}_1(x_1) \rightarrow \mathcal{K}_2(x_2), \dots, \mathcal{K}_n(x_n) \rightarrow \mathcal{K}_1(x_1)$ ト
 topologisch = 寫スナラバ之レハ $\mathcal{K}$ ヲ自ラ全体へ寫ス
 topologische Abbildung デシカモ不動点ガナイ。従
 ヲ $\mathcal{K}$ ノ頂点ハ只一ツナルコトヲ要ス。逆 = $\mathcal{K}$ ノ頂点ガ只
 一ツナルトキハ $\mathcal{K}$ ヲ自ラ全体へ寫ス如何ナル topologische
 Abbildung = 關シテモ頂点ノ Urbild が頂点デナケレバナ
 ラス。従ッテ頂点ガ不動点 = ナル。以上。

定理 3. 頂点唯一ツナル任意ノ abzählbarer Kompak-
 tum $\mathcal{K}$ = 對シテ $\mathcal{K}$ ヲ自ラ全体へ寫シシカモ不動点唯一ツナ
 ル如キ topologische Abbildung (従ッテ勿論 ein-
 deutig stetige Abbildung) が存在スル。

証明. $\mathcal{K}$ ノ頂点ヲ x トシ $0 = \text{收斂スル } \varepsilon_n$ を考ヘル。
 $\mathcal{K}$ = 關スル x ノ ε_n -ausgezeichnete Umgebung U_n

トシ $\mathcal{F} - U_1 = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1$ / U_1 内 = 於ケル ausgezeichnetes
 Bild $\mathcal{F}_1^*$, $U_1 - \mathcal{F}_1^* = A_1$ トスル。 A_{m-1} = 開スル $\mathcal{X}$,
 ε_m -ausgezeichnete Umgebung $\mathcal{U}_m$ トシ $A_{m-1} - U_m$
 $= \mathcal{F}_m$, $\mathcal{F}_m$ / U_m 内 = 於ケル ausgezeichnetes Bild $\mathcal{F}_m^*$,
 $U_m - \mathcal{F}_m^* = A_m$ トスル。然ラバ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}_2$
 $+ \mathcal{F}_2^* + \dots + \mathcal{X}$ ト閉集合ノ直和 = 分解 $\mathcal{F}$ + 同形定理 = ヨ
 リ $\mathcal{F}_m$ ト $\mathcal{F}_m^*$ ハ位相同形ナル。シカモ $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\nu^*$
 $= \mathcal{X}$ ナル故、今 $\mathcal{F}_m$ ト $\mathcal{F}_m^*$ トヲ位相對應セシメ、($m=1, 2, \dots$),
 $\mathcal{X}$ ト $\mathcal{X}$ トヲ位相對應セシメルナラバ之ハ $\mathcal{F}$ ト $\mathcal{F}$ トノ位相對應
 デアリシカモソコ $= \mathcal{X}$ 以外 = 不動点ナリ。以上。

(附言) *perfekt* デモ $\aleph_1$ abzählbar デモナイ nulldi-
 mensionaler Kompaktum, topologische
 Abbildung = 開スル Fixpunktsatz ハ餘リ良イ結
 果カ出ナイ様 = 思ヒマス。

(昭和十二年二月十三日書終ル)