



Title	線状函數方程式ニ就イテ（Ⅲ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 124, p. 107-113
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74479
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

554 線状函数方程式 = 就イテ (III)

北川 敏 男 (阪大)

5. Valiron / 方法. 函数方程式

$$(1) \quad I^{\gamma} f(x) = 0$$

= 於テ $I^{\gamma} j(\lambda x) = G(\lambda) j(\lambda x) = 0$ ツテ 定義サレル母函数

$$(2) \quad G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

ヲ λ 次数 1, *mean type* / 整函数デアルトスル。

$f(x) \in (B^{(\infty)})$ アアリ。且ツ或ル範圍 = 於テ 解析的デアルト

シテ (1) = 關シテ、無限次微分方程式 = 於ケル Valiron / 方法ヲ 試ミテ 見ヨウ。ソノタメ 次ノ 準備ガ 必要デアル。

定義 1.⁽¹⁾ $\{U_n(x)\}$ ナル x / 整函数ノ 系列ガ アツテ

$$(3.1) \quad U_0(x) = 1, \quad D U_0(x) = 0$$

$$(3.2) \quad D U_n(x) = U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ヲ 満足スルトヤ コレヲ D / 基本函数系トイフ。

$$\text{例. 特} = D f(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ナラバ} \quad U_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

定義 2.⁽²⁾ 特 = 次ノ 條件ヲ 満足スル D / 基本函数系ヲバ *Widder* 型デアルトイフ。乃チ

(1) 一般ノ *Transmutation* = 於テ 基本函数系ヲ 考ヘルコトハ 既ニ *Flamant Rend. Palermo*, 54 (1930) カ 試ミテ 居ル。

(2) *Widder*, *Trans. Am. Math. Soc.* 35 (1933) *Sheffer*, *Am. Journ. Math.* 57 (1935) 特 p. 594—597.

$$(4.1) \quad u_n(z) = \frac{z^n}{n!} (1 + h_n(z))$$

$$(4.2) \quad \max_{|z| \leq R} |h_n(z)| = \lambda_n(R)$$

トオクトキ, スベテノ $R = \text{関シテ 常} =$

$$(4.3) \quad (0 \leq) \liminf_n \lambda_n(R) = K(R) < \infty$$

定理 (Sheffer)⁽¹⁾ $\{u_n(z)\}$ が Widder 型基本
函数系デアル場合ニハ

$$(5) \quad n! / t^{n+1} = L_0(t) h_0^{(n)}(0) + L_1(t) \binom{n}{1} h_1^{(n-1)}(0) \\ + \dots + L_{n-1}(t) \binom{n}{n-1} h_{n-1}'(0) + L_n(t)$$

ニ由リ、漸次 $L_n(t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) ヲ定義スルトキ
 $|t| \geq \rho = \text{對シテ 一樣ニ次ノ 關係ガナリタツ。但シ } \rho = \min(\rho, R)$
トスル。乃チ

$$(6) \quad |L_n(t)| \leq \frac{n!}{\rho^{n+1}} (1 + K(R))^n$$

正則函数ト ϕ トノ關係トシテ 吾人ハ次ノ事ヲ假定スル。

假定 R . $f(z)$ ガ或レ領域 S デ正則デアルナラバ, S
ノ領域ニ含マレル任意ノ閉領域 S' ニ於テ $f(z) \in (B^{(\infty)})$
デアリ, 且ツ S デ $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ ナラバ, S' デ
 $\phi^k f_n(z) \Rightarrow \phi^k f(z)$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

然ルトキ吾人ハ次ノ如ク進ム事ガ出來ル。

(1) Sheffer, loc. cit. p. 597. Lemma 3ニ含マレテキル。

(2) Sheffer, loc. cit. p. 597. Theorem 4参照。此ノ目的
デ $k=0$ ニ相當シタエトガ証明サレテキル。

定理 6⁽²⁾ $\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)$ ナル級数ヲ形式的ニ考
 ヘル, コレ $= |z| \leq R$ トスル. 然ルトキニハ, γ ヲ任意ノ
 正数トシ, $\rho = \min(p, R)$, $\ell \leq \frac{\rho}{K(R)+1}$ トスルトキ
 $|z| \leq \ell$, $|w| \geq \gamma$ ニ於テ一様ニ収斂シテ

$$(8) \quad \mathcal{D}_z^k \left[\frac{1}{w-z} \right] = \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)$$

トナル, 而シテ

$$(9) \quad \left| \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z) \right| \leq (1+K(R)) \rho k! \left(\frac{1+K(R)}{\rho-|z|(1+K(R))} \right)^{k+1}$$

証明:

$$(10) \quad \left| L_n(w) u_{n-k}(z) \right| \leq \left| L_n(w) \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} (1+L_{n-k}(z)) \right|$$

$$\leq \frac{n!}{(n-k)!} (1+K(R))^{n+2} \frac{|z|^{n-k}}{\rho^n}$$

依ツテ考ヘル級数ノ優級数トシテ

$$(11) \quad \frac{1}{\rho^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1+K(R))^{n+2}}{(n-k)!} n! \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n-k}$$

ヲ與ヘルコトガ出來ル。コレハ

$$(12) \quad \frac{(1+K)^{2+k} k!}{\rho^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n-k} (1+K)^{n-k}$$

ニ等シイ故、コレカラスベテ求メル事柄ヲ結論シケル。

定理 7. $g(z)$ が $|z-z_0| < (1+K(k))(1+k)$ ($k > 0$)

ヲ充テタルトスル。

然ルトキニハ

$$(13) \quad I'g(z) = C_0 g(z) + C_1 \omega g(z) + \dots + C_n \omega^n g(z) + \dots$$

ハ $|z - z_0| < h$ デ定義セテレ 且ツ ソコ デ正則 デアル。

証明. Cauchy, 積分表示 = 上述 (11) テ代入 スルト
キ

$$(14) \quad \omega^k g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} g(w) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(w) \omega^k u_n(z) dw \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} g(w) \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z) dw$$

茲ニ於テ

$$(15) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |C_k| \left| \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z) \right|$$

ヲ考ヘル。コレニ對シテ 次ノモノガ majorant となル。

$$(1+K(k)) \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k!} k! \left(\frac{1+K(k)}{\rho - |z|(1+K(k))} \right)^{k+1} \\ = \frac{(1+K(k))^2 \rho}{\rho - |z|(1+K(k))} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(1+\varepsilon)(1+K(k))}{\rho - |z|(1+K(k))} \right|^{k+1}$$

コレカラ求メル結果ヲウル。

以上ノコトが成立スル以上 Valiron ノ方法⁽¹⁾ノ一般化ハ容易デアル。

-
- (1) G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre inf. et à coeff. const. Ann. d. l'Ecole Norm. 3 Tome 46 (1929)

定理 8. $f(z) \rightarrow \infty$ as $|z - z_0| < (D + \beta)(1 + K(h)) + h =$
 於テ正則ナル, 函数方程式 (1) ノ解デアルトスル。然ルトキ
 $= h \quad |z - z_0| < h =$ 於テ一樣 =

$$(16) \quad f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} G(e^{-\beta_m d} f(z); 1, 2, \dots, m)$$

デアイル。

(註) $G(\lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\beta_m \lambda} \prod_{n=1}^m \left(1 - \frac{\lambda}{a_n}\right), \quad \beta_m = \lambda + \sum_{n=1}^m \frac{1}{a_n}$
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \beta =$ ヲツテ β ヲ定義スル。常数 $D \in G(\lambda)$
 $\lambda \ni =$ depend スル。 (Valiron, loc. cit. p.32)

$$P(\lambda; 1, 2, \dots, m) \equiv \prod_{n=1}^m \left(1 - \frac{\lambda}{a_n}\right), \quad G(\lambda; 1, 2, \dots, m) \\ = G(\lambda) / P(\lambda; 1, \dots, n)$$

トオク。コレ = 對應シテ $P(d; 1, 2, \dots, m), G(d; 1, 2, \dots, n)$
 ナル Operator ヲ考ヘル。

6. 吾々ノ取扱ヒ來ツタ Contour-integral = ツ
 イテ Valiron ノ方法ヲ interpretate スル, が本節ノ
 目的デアイル。

$$S_r(z; 0; f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{j(\lambda z)}{G(\lambda)} \Gamma(L_\lambda(f(x))) d\lambda$$

$\mathcal{C}_r$ ノ内部 = $a_1, a_2, \dots, a_m$ ナル零點ガアルト
 シ, 兩辺 = 對シテ $G(d; 1, 2, \dots, n) e^{-\beta_m d}$ ヲ施ス。

然ルトキ =

$$(17) \quad G(e^{-\beta_m d} S_r(x; 0; f); 1, 2, \dots, m)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{j(\lambda x)}{e^{\beta_m \lambda} P(\lambda; 1, 2, \dots, n)} \Gamma_0(\mathcal{L}_\lambda(f(x)) d\lambda$$

然ルニ.

$$(18) \quad \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) \\ = P(\vartheta; 1, 2, \dots, m) e^{+\beta_m \vartheta} \left[e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \dots, m)(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) \right]$$

他方 = 於テ次ノ補助定理ヲ準備スル。

補助定理1. $f(x) \in (B^{(\infty)})$ ($\mathcal{L}_\lambda(f(x)) \in (B^{(\infty)})$) ト

スル。然ルトキ

$$(19) \quad \vartheta^n \mathcal{L}_\lambda(f(x)) = \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x)) + (\vartheta^n \mathcal{L}(f(x)))_0 j(\lambda x)$$

証明:

$$\vartheta \mathcal{L}_\lambda(f(x)) = \lambda \mathcal{L}_\lambda(f(x)) + f(x)$$

= 對シテ ϑ^n ヲ施ス。他方 = 於テ

$$\vartheta \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x)) = \lambda \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x)) + \vartheta^n f(x)$$

依ツテ

$$(*) \quad \vartheta \left[\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda(f(x)) - \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x)) \right] \\ = \lambda \left[\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda(f(x)) - \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x)) \right]$$

而シテ

$$\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda(f(x)) - \mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x)) - (\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0 j(\lambda x)$$

ハ (C) = 屬シ, 上ノ關係ヲミタス。ヨツテソレハ恒等的 = 零
(*)
ガナケレバナラナイ。

補助定理2. $e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \dots, m) \mathcal{L}_\lambda(f(x))$

$$(20) \quad = \mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \dots, m) f(x)) \\ + (e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \dots, m) \mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0 j(\lambda x)$$

(19) ト (20) トヲ結合スルトキ

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) \\
 &= P(d; 1, 2, \dots, m) e^{\beta_m d} \left\{ \mathcal{L}_\lambda \left(e^{-\beta_m d} G(d; 1, \dots, m) f(x) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(e^{-\beta_m d} G(d; 1, 2, \dots, m) \mathcal{L}_\lambda(f(x)) \right) \right\} P(\lambda; 1, \dots, m) j(\lambda)
 \end{aligned}$$

$$(17) = \text{代}\lambda \forall \tau$$

$$\begin{aligned}
 & G \left[e^{-\beta_m d} S'_p(z, 0; f); 1, 2, \dots, m \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{j(\lambda z)}{e^{\beta_m \lambda} p(\lambda; 1, 2, \dots, m)} \underbrace{P(d; 1, \dots, m) e^{\beta_m d}}_0 \left\{ \mathcal{L}_\lambda \left(e^{-\beta_m d} G(d; 1, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \dots, m) f(x) \right) \right\} d\lambda
 \end{aligned}$$

$$= e^{-\beta_m d} G(d; 1, \dots, m) f(z)$$

$$= G \left[e^{-\beta_m d} f(z); 1, 2, \dots, m \right]$$

然ルニ、(16)ヲ用ニルトキ

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} G \left[e^{-\beta_m d} S'_p(z, 0; f); 1, 2, \dots, m \right] \\
 &= f(z)
 \end{aligned}$$

ニテ、ソコデ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S'_p(z, 0; f) = S(z, 0; f)$$

が存在スルトキニハ

$$S(z, 0; f) = f(z)$$

トナル。コレガ Valiron の定理 XVI (loc. cit. p. 41) = 相當スルノデアル。