OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	線状函數方程式ニ就イテ（III）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 124, p. 107-113
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74479
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

554. 線狀函數方程式ニ就イテ(III)

北川　敏男（阪大）

5. Valiron ノ方法、函數方程式

(1)　$If(x)=0$

ニ於テ $If(\lambda x)=G(\lambda)f(\lambda x)$ ニヨッテ定義サレル毋函數

(2)　$$G(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^n$$

ヲ次數 1, mean type ノ整函數デアルトスル。

$f(x)\in(B^{(\infty)})$ デアリ且ツ或ル範囲ニ於テ解析的デアルトシテ (1) ニ關シテ、無限次微分方程式ニ於ケル Valiron ノ方法ヲ試ミテ見ヨウ。ソノタメ次ノ準備が必要デアル。

定義1.[1]　$\{u_n(z)\}$ ナル z ノ整函數ノ系列ガアッテ

(3.1)　$u_0(z)=1,\quad \mathcal{D}u_0(z)=0$

(3.2)　$\mathcal{D}u_n(z)=u_{n-1}(z)\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

ヲ滿足スルトキコレヲ $\mathcal{D}$ ノ基本函數系トイフ。

例. 特ニ $\mathcal{D}f(z)\equiv\dfrac{df(z)}{dz}$ ナラバ $u_n(z)=\dfrac{z^n}{n!}$

定義2.[2]　特ニ次ノ條件ヲ滿足スル $\mathcal{D}$ ノ基本函數系ヲバ Widder 型デアルトイフ。乃チ

---

(1)　一般ノ Transmutation ニ於テ基本函數系ヲ考ヘルコトハ既ニ Flamant Rend. Palerms, 54 (1930) ガ試ミテ居ル。

(2)　Widder, Trans. Am. Math. Soc. 35 (1933) Sheffer, Am. Journ. Math. 57 (1935) 特 p. 594—597.

$$(4.1)\qquad u_n(z)=\frac{z^n}{n!}\left(1+h_n(z)\right)$$

$$(4.2)\qquad \max_{|z|\leqq R}|h_n(z)|=\lambda_n(R)$$

トオク トキ，スベテノ R ニ関シテ常ニ

$$(4.3)\qquad (0\leqq)\ \lim_n \text{l.u.b.}\ \lambda_n(R)=K(R)<\infty$$

定理 (Sheffer)[1] $\{u_n(z)\}$ ガ Widder 型基本函数系デアル場合ニハ

$$(5)\qquad n!/t^{n+1}=L_0(t)\,h_0^{(n)}(0)+L_1(t)\binom{n}{1}h_1^{(n-1)}(0)+\cdots\cdots+L_{n-1}(t)\binom{n}{n-1}h'_{n-1}(0)+L_n(t)$$

ニ由リ、漸次 $L_n(t)$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ ヲ定義スルトキ $|t|\geqq\rho$ ニ對シテ一様ニ次ノ関係ガナリタツ。但シ $\rho=\min(r,R)$ トスル。即チ

$$(6)\qquad |L_n(t)|\leqq\frac{n!}{\rho^{n+1}}\left(1+K(R)\right)^n$$

正則函數トノトノ関係トシテ吾人ハ次ノ事ヲ假定スル。

假定 R. $f(z)$ ガ或ル領域 S デ正則デアルナラバ，ソノ領域ニ含マレル任意ノ閉領域 S' ニ於テ $f(z)\in(B^{(\omega)})$ デアリ，且ツ S デ $f_n(z)\Rightarrow f(z)$ ナラバ，S' デ $\mathcal{D}^k f_n(z)\Rightarrow\mathcal{D}^k f(z)$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$

然ルトキ吾々ハ次ノ如ク進ム事ガ出來ル。

---

(1) Sheffer, loc. cit. p. 597. lemma 3 ニ含マレテヰル。

(2) Sheffer, loc. cit. p. 597. Theorem 4 參照。他ノ目的デ $k=0$ ニ相當シタコトガ証明サレテヰル。

定理6[2] $\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w)\,u_{n-k}(z)$ ナル級数ヲ形式的ニ考ヘル。コヽニ $|z| \leqq R$ トスル。然ルトキニハ，r ヲ任意ノ正数トシ，$\rho = \min(r, R)$，$l \leqq \dfrac{\rho}{\mathrm{K}(R)+1}$ トスルトキ $|z| \leqq l$，$|w| \geqq r$ ニ於テ一様ニ収斂シテ

$$(8)\qquad \mathcal{D}_z^{k}\left[\frac{1}{w-z}\right] = \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w)\,u_{n-k}(z)$$

トナル。而シテ

$$(9)\qquad \left|\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w)\,u_{n-k}(z)\right| \leqq (1+\mathrm{K}(R)\,\rho k!\left(\frac{1+\mathrm{K}(R)}{\rho-|z|(1+\mathrm{K}(R)}\right)^{k+1}$$

証明:

$$(10)\qquad \left|L_n(w)\,u_{n-k}(z)\right| \leqq \left|L_n(w)\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}(1+h_{n-k}(z))\right|$$

$$\leqq \frac{n!}{(n-k)!}(1+\mathrm{K}(R))^{n+2}\frac{|z|^{n-k}}{\rho^{n}}$$

依ッテ考ヘル級数ノ優級数トシテ

$$(11)\qquad \frac{1}{\rho^{k}}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{K}(R))^{n+2}}{(n-k)!}\,n!\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n-k}$$

ヲ與ヘルコトガ出來ル。コレハ

$$(12)\qquad \frac{(1+\mathrm{K})^{2+k}k!}{\rho^{k}}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{n-k}(1+\mathrm{K})^{n-k}$$

ニ等シイ故、コレカラスベテ求メル事柄ヲ結論シウル。

定理7. $g(z)$ ガ $|z-z_0| < (1+\mathrm{K}(h))(\Gamma+h)\ (h>0)$ デ正則デアルトスル。

然ルトキニハ

(13) $$\Gamma g(z) = C_0 g(z) + C_1 \mathcal{D} g(z) + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + C_n \mathcal{D}^n g(z) + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ $|z - z_0| < h$ デ定義セラレ且ツソコデ正則デアル。

証明. Cauchy ノ積分表示ニ上述(11)ヲ代入スルトキ

(14) $$\mathcal{D}^k g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C g(w) \sum_{n=s}^{\infty} L_n(w) \mathcal{D}^k u_n(z)\, dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C g(w) \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)\, dw$$

茲ニ於テ

(15) $$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k| \left| \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z) \right|$$

ヲ考ヘル。コレニ對シテ次ノモノガ majorant ナル。

$$(1+K(h)) \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Gamma+\varepsilon)^k}{k!} k! \left(\frac{1+K(h)}{\rho - |z|(1+K(h))} \right)^{k+1}$$
$$= \frac{(1+K(h))^2 \rho}{\rho - |z|(1+K(h))} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(\Gamma+\varepsilon)(1+K(h))}{\rho - |z|(1+K(h))} \right|^{k+1}$$

コレカラ求メル結果ヲ得ル。

以上ノコトガ成立スル以上 Valiron ノ方法[1] ノ一般化ハ容易デアル。

---

(1) G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre inf. et a coeff. const. Ann. d. l'Ecole Norm. 3 Tome 46 (1929)

定理 8. $f(z)$ ヲ $|z-z_0|<(D+\beta)(1+K(h))+h$ ニ於テ正則ナル，函数方程式 (1) ノ解デアルトスル。然ルトキニハ $|z-z_0|<h$ ニ於テ一様ニ

$$(16)\qquad f(z)=\lim_{m=\infty} G\left[e^{-\beta_m \vartheta} f(z);\ 1,2,\cdots\cdots,m\right]$$

デアル。

(註) $G(\lambda)=\lim_{m=\infty} e^{\beta_m \lambda}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right)$, $\beta_m=\alpha+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n}$

$\overline{\lim_{m\to\infty}}\beta_m=\beta$ ニヨッテ β ヲ定義スル。常数 D モ $G(\lambda)$ ノミニ depend スル。(Valiron, loc. cit. p.32)

$$P(\lambda;1,2,\cdots\cdots,m)\equiv\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right),\quad G(\lambda;1,2,\cdots m)$$

$$=G(\lambda)\Big/P(\lambda;1,\cdots\cdots,n)$$

トオク。コレニ對應シテ $P(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)$, $G(\vartheta;1,2,\cdots n)$ ナル Operator ヲ考ヘル。

6. 吾々ノ取扱ヒ來ッタ Contour-integral ニツイテ Valiron ノ方法ヲ interpretate スルノガ本節ノ目的デアル。

$$S_r(z;0;f)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{j(\lambda z)}{G(\lambda)}\Gamma\left(L_\lambda(f(x)\right)d\lambda$$

C_r ノ内部ニハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$ ナル零点ガアルトシ，両辺ニ対シテ $G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,n)e^{-\beta_m\vartheta}$ ヲ施ス。然ルトキニハ

$$(17)\qquad G\left[e^{-\beta_m\vartheta}S_r(x;0;f);\ 1,2,\cdots\cdots,m\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{j(\lambda\alpha)}{e^{\beta_m \lambda} P(\lambda; 1, 2, \cdots\cdots, n)} \Gamma_0 \left(\mathcal{L}_\lambda (f(x)) \right) d\lambda$$

然ルニ.

(18) $$\Gamma\left(\mathcal{L}_\lambda (f(x))\right) = P(\vartheta; 1, 2, \cdots\cdots, m) e^{+\beta_m \vartheta} \left[e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \cdots, m) \left(\mathcal{L}_\lambda (f(x)) \right) \right]$$

他方ニ於テ次ノ補助定理ヲ準備スル。

補助定理1. $f(\alpha) \in (B^{(\infty)})$ $(\mathcal{L}_\lambda (f(x)) \in (B^{(\infty)})$ トスル。然ルトキ

(19) $$\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda (f(x)) = \mathcal{L}_\lambda (\vartheta^n f(x)) + \left(\vartheta^n \mathcal{L} (f(x)) \right)_0 j(\lambda x)$$

証明:

$$\vartheta \mathcal{L}_\lambda (f(x)) = \lambda \mathcal{L}_\lambda (f(x)) + f(\alpha)$$

ニ對シテ ϑ^n ヲ施ス。他方ニ於テ

$$\vartheta \mathcal{L}_\lambda (\vartheta^n f(x)) = \lambda \mathcal{L}_\lambda (\vartheta^n f(x)) + \vartheta^n f(x)$$

依ッテ

(米) $$\vartheta \left[\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda (f(x)) - \mathcal{L}_\lambda (\vartheta^n f(x)) \right] = \lambda \left[\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda (f(x)) - \mathcal{L}_\lambda (\vartheta^n f(x)) \right]$$

而シテ

$$\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda (f(x)) - \mathcal{L}_\lambda (\vartheta^n f(x)) - \left(\vartheta^n \mathcal{L}_\lambda (f(x)) \right)_0 j(\lambda x)$$

ハ (C) ニ屬シ，上ノ關係(米)ヲミタス。ヨッテソレハ恒等的ニ零ナケレバナラナイ。

補助定理2. $$e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \cdots\cdots, m) \mathcal{L}_\lambda (f(x))$$

(20) $$= \mathcal{L}_\lambda \left(e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \cdots\cdots, m) f(x) \right) + \left(e^{-\beta_m \vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \cdots\cdots, m) \mathcal{L}_\lambda (f(x)) \right)_0 j(\lambda x)$$

(19) ト (20) トヲ結合スルトキ

(21) $\Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$

$$= P(\partial; 1, 2, \cdots, m) e^{\beta_m \partial} \{\mathcal{L}_\lambda (e^{-\beta_m \partial} G(\partial; 1, \cdots, m) f(x))\}$$
$$+ (e^{-\beta_m \partial} G(\partial; 1, 2, \cdots, m) \mathcal{L}_\lambda (f(x))_0 P(\lambda; 1, \cdots m) j(\lambda x)$$

(17) = 代入シテ

$$G[e^{-\beta_m \partial} S_p'(z, 0; f); 1, 2, \cdots, m]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{j(\lambda z)}{e^{\beta_m \lambda} p(\lambda; 1, 2, \cdots, m)} \underbrace{P(D; 1, \cdots m) e^{\beta_m \partial}}_{0} \{\mathcal{L}_\lambda (e^{-\beta_m \partial} G(\partial; 1,$$

$$\cdots\cdots, m) f(x))\} d\lambda$$

$$= e^{-\beta_m \partial} G(\partial; 1, \cdots, m) f(z)$$

$$= G[e^{-\beta_m \partial} f(B); 1, 2, \cdots\cdots, m]$$

然ルニ、(16)ヲ用ヒルトキ

(22) $$\lim_{m \to \infty} G[e^{-\beta_m \partial} S_p'(z, 0; f); 1, 2, \cdots, m]$$

$$= f(z)$$

ニナル、ソコデ

$$\lim_{m \to \infty} S_p'(z, 0; f) = S(z, 0; f)$$

ガ存在スルトキニハ

$$S(z, 0; f) = f(z)$$

トナル。コレガ Valiron ノ定理 XVI (loc. cit. p. 41) ニ相當スルノデアル。