



Title	函数方程式 $f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z)$ 二就イテ, IV
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 124, p. 114-118
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74480
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

555. 函数方程式

$$f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, x) \\ = \text{就イテ (IV)}$$

角 谷 静 夫 (阪大)

(C) = ヨツテ (33) が成立スルコトがワカッタが更ニ精シク $g(P, Q)$ ノ性質ヲ調べヨウ。

(d) 次ノニツノ場合ガアル。

(i) $C(\pi) \neq 0$ ナルトキ。 π 上ニ一点 O ガ存在シテ

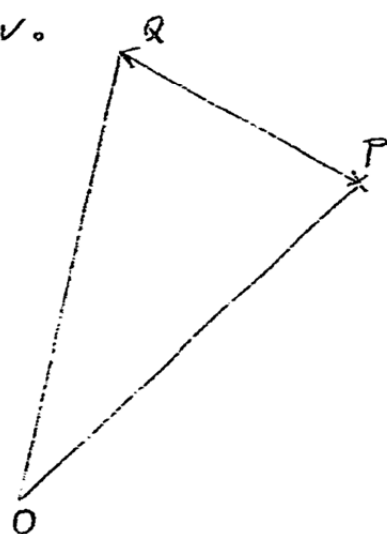
$$g(P, Q) = C(\pi) \cdot A(OPQ) \cdots \cdots (34)$$

トナル。ユコ $= A(OPQ)$ ハ $\triangle OPQ$ ノ面積デアル。

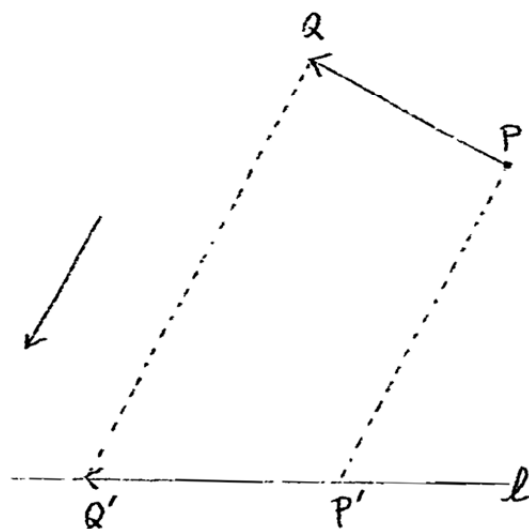
(ii) $C(\pi) = 0$ ナルトキ。 π 上ニ一ツノ方向 d ガ存在シテ P, Q ヲ d ノ方向ニ、 d ト平行デナイ直線 l 上ニ射影シタ点ヲ P', Q' トスレバ

$$g(P, Q) = g(P', Q') \equiv C(l) \cdot L(\overrightarrow{P'Q'}) \cdots \cdots (35)$$

トナツテキル。但シ $L(\overrightarrow{P'Q'})$ ハ $P'Q'$ ノ長さ (方向モ考ヘ入レタ) デアル。



(i) ノ場合



(ii) ノ場合

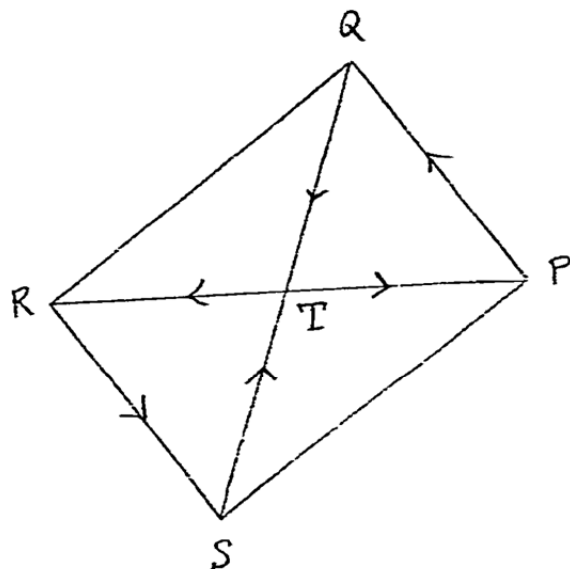
(ii) $\wedge$ (i) = 於テ O が ∞ = ナッタ時デアルト考ヘルコトが出来ル。又 $g(P, Q)$ が恒等的 = O トナルトキハ (34), (35) ノ何レが成立スルト考ヘテモ差支ヘナイ。

証明: π 上 = 任意
ノ矩形 $\square = PQRS$ ヲ
考ヘル。

$$PQ = SR = a,$$

$$QR = PS = b$$

トシ PR ト QS トノ交点
ヲ T トスレバ



$$\Omega(PQT) + \Omega(RST)$$

$$= c(\pi) \cdot \frac{ab}{4} + c(\pi) \cdot \frac{ab}{4} = c(\pi) \cdot \frac{ab}{2}$$

デアル。然ルニ

$$\text{左辺} = g(P, Q) + g(Q, T) + g(T, P)$$

$$+ g(R, S) + g(S, T) + g(T, R)$$

デ且ツ (2) ヨリ

$$g(Q, T) + g(S, T) = 0$$

$$g(T, P) + g(T, R) = 0$$

デアルカラ

$$g(P, Q) - g(S, R) = c(\pi) \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

トナル。今 P, Q ヲ通ル直線ヲ ℓ , S, R ヲ通ル直線ヲ ℓ' ト
スレバコレヨリ

$$a \cdot c(\ell) - a \cdot c(\ell') = c(\pi) \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

即チ

$$c(l) - c(l') = \frac{c(\pi)}{2} \cdot b$$

ヲ得ル。ヨツテ次ノ結果ヲ得ル。

コレハ一ツノ直線 l_0 = 平行ナ直線 l = 内スル $c(l)$ が l ト l_0 トノ距離 = 比例シテ変化スルコトヲ意味スル。シカモソノ比例ノ常数ハ各方向 = 對シテ一定デ $\frac{c(\pi)}{2}$ = ヒトシイ。

次 = $c(\pi) \neq 0$ ナルトキト $c(\pi) = 0$ ナルトキト = ワケテ考ヘル。

(I) $c(\pi) \neq 0$ ナルトキ。

任意ノ方向ノ直線 l_0 = 對シテ、コレト平行デ且ツ $c(l) = 0$ トナル如キ直線 l が存在スル、(コレヲ作ルタメニハ l_0 ト平行デ l_0 トノ距離が $-\frac{2c(l_0)}{c(\pi)}$ ナル直線ヲトレ、モヨイ。)

トコロが各方向 = 對スルコノヤウナ直線ハ一定点 O ヲ通ラネバナラナイ。何トナレバ若シサウデナケレバ一點ヲ通ラナイ三ツノ直線 l_1, l_2, l_3 = テ、何レノニツモ互ニ平行デナク且ツ $c(l_1) = c(l_2) = c(l_3) = 0$ トナルモノが存在スル。

l_1, l_2, l_3 ノ作ル三角形 PQR ヲ考ヘレバ $c(\pi) \neq 0$ ヨリ $\angle B(PQR) \neq 0$ トナラネバナラナイガ一方 $\angle B(PQR) = g(P, Q) + g(Q, R) + g(R, P)$ デ右辺ハ $c(l_1) = c(l_2) = c(l_3) = 0$ ヨリ 0 トナラネバナラヌカラ矛盾デアアル。

此ノ如ク一定点 O が存在シテ O ヲ通ル任意ノ直線 l = 對シテ $c(l) = 0$ トナルコトがワカル。 $g(Q, O) = g(O, P) = 0$

デアルカラ

$$\begin{aligned} g(P, Q) &= g(O, P) + g(P, Q) + g(Q, O) \\ &= \Omega(OPQ) = c(\pi) \cdot A(OPQ) \end{aligned}$$

トナル。即チ (34) が成立スル。

(II) $c(\pi) = 0$ ナルトキ。

コノトキハ互ニ平行ナニツノ直線 $l, l' =$ 對シテ $c(l) = c(l')$ デアル。

今三角形 PQR ヲ考ヘレバ

$$\Omega(PQR) = 0 \text{ ヨリ}$$

$$g(P, Q) + g(Q, R) = g(P, R)$$

ヲ得ル。 PR 上ニ $Q' =$

$$g(P, Q') = g(P, Q)$$

(從ツテ又 $g(Q', R) = g(Q, R)$)

ナル如クトレバ $\Omega(PQQ') = 0$ ナルコトカラ

$$g(Q, Q') = 0$$

トナル。ヨツテ $\overrightarrow{QQ'} =$ 平行ナ直線 $l' =$ 關シテ $c(l') = 0$ デアル。故ニ QQ' ノ方向ヲ d トスレバ、コレガ (ii) ノ條件ヲ満足スルコトハ容易ニワカル。何トナレバ d ト平行デナイ直線 l ヲトリ、 l 上ニ P, Q ヲ d ノ方向ニ project シタ點ヲ大々 P', Q' トスレバ $c(\pi) = 0$ ヨリ

$$0 = \Omega(PQQ'P') = g(P, Q) + g(Q, Q') + g(Q', P') + g(P', P)$$

然ルニ $\overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PP'} \wedge d =$ 平行デアルカラ $g(Q, Q') = g(P', P) = 0$

トナリ、シタガツテ

$$g(P, Q) = g(P', Q') = c(l) \cdot L(\overrightarrow{P'Q'}) \text{ ----- (35)}$$

トナル。

(e) R_{n-1} 内ノ直線 $l = \tau$ $c(l) = 0$ ナル ϵ ノ全体ノ集合ヲ Γ トスル。(d) デ考ヘテコトヨリ R_{n-1} 内ノ二次元ノ平面 π 上デハ Γ ハ一点 $O(\pi)$ ヲ通ル直線全体カ又ハ平行線全体ニナツテキル。後ノ場合ニハ $O(\pi)$ ハ ∞ ニアルト考ヘルコトガ出来ル。カナル直線ノ集合ハ射影幾何學デ論ツラレテキル。