



Title	空間曲線ノ射影微分幾何学ニ於ケル extrémales ニ就 テ
Author(s)	金原, 誠
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 125, p. 123-130
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74483
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

558. 空間曲線ノ射影微分幾何學ニ於ケル
extrémales = 就テ

△ 原 誠 (滋順工大豫科)

空間曲線が *paramètre* u ヲ用ヒテ表ハサレテキルト
 キ, ソノ曲線上ノ1点ヲ x トシ, x_1, x_2, x_3 ヲ適當ニ選ンデ
 4点 x, x_1, x_2, x_3 ヲ頂点トスル四面体ヲ *repère fonda-*
mental = 取レバ曲線ノ基本方程式ハ

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = x_1, \\ \frac{dx_1}{du} = 3kx + h x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{du} = \nu x + 3k x_1 + 2h x_2 + x_3, \\ \frac{dx_3}{du} = \rho x + \nu x_1 + 3k x_2 + 3h x_3 \end{cases}$$

ト書クコトが出来テ

$$\nu du^3, \rho du^4$$

ハ *invariantes et intrinsèques* テアル、コレハ蟹
 谷教授 = ヨツテ導カレ、夫々曲線ノ第一種及ビ第二種ノ射影
 的線元素ト稱セラレテキレ。(註1)

平面曲線ノ射影的線元素ハ古ク Halphen = ヨツテ定メラ
 レ、コレニ關スル *extrémales* ハ Cartan = ヨツテ研
 究セラレタ。(註2) Cartanノ方法ヲ用ヒテ

$$\int \sqrt[3]{\nu} du, \int \sqrt[4]{\rho} du$$

、*extrémales* を求ムル、がコノ *article* ノ目的デア
ル。

I

1. 今 $\tau = \int \sqrt[3]{V} du$ ト置キ、 $x =$ 適當ナ *facteur* を
掛ケレバ (1) ハ次ノヤリ = 書クコトが出来ル。

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x, \\ \frac{dx_1}{d\tau} = 3Kx + x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x + 3Kx_1 + x_3, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = Rx + x_1 + 3Kx_2 \end{cases}$$

コノ $R = K$ ハ坪光氏ノ射影的曲率 = 常数ヲ掛ケタム、デア
リ、(註3)

$$R = \frac{\int du^4}{(\int du^3)^{\frac{4}{3}}}$$

デアツテ共 = *invariantes et intrinsèques* デア
ル。

2. コノ一群ノ曲線ヲ考ヘ、ソノ各曲線上ノ各点ニ上
ニ定メテ *repère* を *attacher* スル、然ルトキハ $x, x_1,$
 x_2, x_3 ハ次ノ *paramètres = dépendantes* =
ナリ

$$(3) \quad dx_i = \omega_i^0 x + \omega_i^1 x_1 + \omega_i^2 x_2 + \omega_i^3 x_3, \\ (i = 0, 1, 2, 3; x_0 \equiv x)$$

ト書クコトが出来ル、又互ニ交換可能ナ微分記号 d 及び δ ヲ
用ヒレバ射影空間ノ *équations de structure* ハ

$$(4) \quad d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) \\ = \sum_k [\omega_i^k(d)\omega_k^j(\delta) - \omega_i^k(\delta)\omega_k^j(d)]$$

トナル、但シコト $= \omega_i^j$ ハ Pfaff ノ記号ヲ *paramètres*
ノ微分ニ関スル一次式ヲ表ハスモノトナル、尚 x, x_1, x_2, x_3
 $=$ 共通ナ *facteur* ヲ掛ケテ

$$(5) \quad \sum_{\sigma} \tilde{\omega}_{\sigma}^{\sigma} = 0$$

トナルマツニシテオク。

此ノ結果ヲ我々ノ問題ニ用ヒル。 $\int d\tau$ ノーツノ *ex-
trémale* ヲ Γ トシ、 Γ ハ任意ノ数ノ *paramètres* $=$
dépendantes ナ曲線群ニ属スルモノトナル、コノ曲線群
ノ各曲線ノ各点ニ上ニ定メテ *repère* ヲ *attacher* スレ
バ ω_i^j ハテ及び *paramètres* ノ微分ニ関スル一次式ト
ナル。簡單ノタトニ曲線ニ沿ツテノ *déplacement* ヲ d 、
paramètres ノミニヨル *déplacement* ヲ δ ナ表
ハスコトトシ

$$\omega_i^j(d) = \omega_i^j, \quad \omega_i^j(\delta) = e_i^j$$

ト書クコトニスレバ (4) ハ

$$(6) \quad \delta\omega_i^j - de_i^j = \sum_k [e_i^k\omega_k^j - \omega_i^k e_k^j]$$

トナル。

今曲線群ノ曲線ノ任意ノ一ツニ沿ッテ *déplace* サセレバ (2)
 = ヲツテ

$$(7) \quad \begin{cases} \omega_0^0 = 0, \omega_0^1 = d\tau, \omega_0^2 = 0, \omega_0^3 = 0, \\ \omega_1^0 = \omega_2^1 = \omega_3^2, \omega_1^1 = 0, \omega_1^2 = \omega_0^1, \omega_1^3 = 0, \\ \omega_2^0 = \omega_0^1, \omega_2^2 = 0, \omega_2^3 = \omega_0^1, \\ \omega_3^0 = R\omega_0^1, \omega_3^1 = \omega_0^1, \omega_3^2 = 3K\omega_0^1, \omega_3^3 = 0. \end{cases}$$

3. (6)ニ於テ $i=0, j=1$ トオケル

$$\begin{aligned} \delta\omega_0^1 - de_0^1 &= \sum_k [e_0^k \omega_k^1 - \omega_0^k e_k^1] \\ &= (e_0^0 - e_1^1 + e_0^3 + 3Ke_0^2) d\tau \end{aligned}$$

シテガツテ

$$\begin{aligned} \delta \int d\tau &= \delta \int \omega_0^1 = \int \delta \omega_0^1 = \int (e_0^0 + e_0^0 - e_1^1 + e_0^3 + 3Ke_0^2) d\tau, \\ &\left(e_0^1 = \frac{de_0^1}{d\tau} \right). \end{aligned}$$

故ニ $\int d\tau$, *extrémales* ハ

$$(8) \quad \int (e_0^0 + e_0^0 - e_1^1 + e_0^3 + 3Ke_0^2) d\tau = 0$$

ヲ満足スル。

(6) ト (7) トヲ用ヒテ計算スレバ

$$\begin{aligned} (9) \quad e_0^0 - e_1^1 + e_0^3 + 3Ke_0^2 \\ = -\frac{1}{6}(2e_0^1 - e_2^0 - e_3^1)' + \frac{2}{3}e_0^{2''} + \frac{1}{6}e_0^{3'''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{3}{2} K K' e_0^2 + \left(\frac{R}{3} + \frac{9}{2} K^2 \right) e_0^{2'} - \frac{1}{2} K e_0^{2''} \right\} \\
& + \left\{ K' e_0^3 + \left(\frac{5}{2} K + \frac{3}{4} K K' \right) e_0^{3'} + \left(\frac{R}{6} + \frac{9}{4} K^2 \right) e_0^{3''} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} K e_0^{3'''} \right\}.
\end{aligned}$$

コレヲ(8) = 代入シテ部分積分法ヲ數回行ハバ積分出來タ部分
ト

$$\begin{aligned}
& \int \left[\left(\frac{1}{2} K''' - \frac{15}{2} K K' - \frac{1}{3} R' \right) e_0^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} K''' + \frac{15}{4} K K'' + \frac{15}{4} K'^2 - \frac{3}{2} K' + \frac{R''}{6} \right) e_0^3 \right] d\tau
\end{aligned}$$

トナル。 e_0^2 ト e_0^3 トハ独立ナルカラ求ムル *extrémales*
ノ自然方程式ハ

$$(10) \quad \begin{cases} K''' - 15 K K' = \frac{2}{3} R', \\ K''' - 15 K K'' - 15 K'^2 + 6 K' = \frac{2}{3} R''. \end{cases}$$

$$\text{シタカツテ} \quad 6 K' = 0$$

故ニ

$$(11) \quad K = \text{const.}, \quad R = \text{const.}$$

即チ “ $\int \sqrt[3]{V} du$, *extrémales* ハ坪光氏ノ曲率及ビ第
二種射影的線元素ト第一種射影的線元素ノ $\frac{4}{3}$ 乗ノ比ガ一定
ナル W 曲線ナル。”

シタカツテ今 X, Y, Z ヲ以テ曲線上ノ点ノ非齊次座標
ヲ表ハスモノトスレバ, *transformation homographi-*
que = ヲツテ

$$\begin{cases} Y = X^m \\ Z = X^n \end{cases}$$

及^ニ其ノ他ノ形ニ導クコトが出来、且^ツ *im groupe homographique continu à un paramètre admet*
スル。(註4)

II

4. (1) = 於テ $\sigma = \int \sqrt[4]{\rho} du$ ト置キ、適當ナ *facteur*
ヲ掛ケレバ

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = x_1, \\ \frac{dx_1}{d\sigma} = 3Mx + x_2, \\ \frac{dx_2}{d\sigma} = Nx + 3Mx_1 + x_3, \\ \frac{dx_3}{d\sigma} = x + Nx_1 + 3Mx_2. \end{cases}$$

トナル、 $N = N$ ハ

$$(13) \quad N = \frac{\nu du^3}{(\rho du^4)^{\frac{3}{4}}}$$

デアツテ M ト共ニ *invariantes et intrinsèques* テアル。 $\int d\sigma$, *extrémales* ヲ求メルヌ
= I ト同様ナ方法ヲ用ヒル、今ノ場合ニハ (12) = ヨツテ次ノ
關係ヲ得ル。

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_0^0 = 0, & \omega_0^1 = d\sigma, & \omega_0^2 = 0, & \omega_0^3 = 0, \\ \omega_1^0 = \omega_2^1 = \omega_3^2, & \omega_1^1 = 0, & \omega_1^2 = \omega_0^1, & \omega_1^3 = 0, \\ \omega_2^0 = \omega_3^1, & \omega_2^2 = 0, & \omega_2^3 = \omega_0^1, \\ \omega_3^0 = \omega_0^1, & \omega_3^1 = N\omega_0^1, & \omega_3^2 = 3M\omega_0^1, & \omega_3^3 = 0. \end{cases}$$

(6) = 於テ $i=0, j=1$ ト置キ (14) ヲ用ヒレバ $\int d\sigma$, *extrémales* ハ

$$(15) \quad \delta \int d\sigma = \int (e_0' + e_0^0 - e_1' + 3Me_0^2 + Ne_0^3) d\sigma = 0,$$

$$(e_0' = \frac{de_0^1}{d\sigma}).$$

ヲ満足スルコトがワカル。(6) ト (14) トヲ用ヒテ計算スレバ

$$(16) \quad e_0^0 - e_1' + 3Me_0^2 + Ne_0^3 = -\frac{1}{4}(e_0' - e_3^0)' + \frac{3}{4}M(e_3' - e_2^0) \\ + \frac{1}{4}N(e_3^2 - e_1^0) + \frac{3}{4}e_0^{2''} + \frac{3}{4}M'e_0^3 + \frac{3}{4}Me_0^{3'} \\ + \frac{1}{4}e_0^{3'''}$$

コレヲ (15) = 代入スレバ積分出來タ部分ト

$$\int \left[\frac{3}{4}M(e_3' - e_2^0) + \frac{1}{4}N(e_3^2 - e_1^0) \right] d\sigma$$

トナル。 $e_3' - e_2^0$ ト $e_3^2 - e_1^0$ トハ独立ナルカラ *extrémales* ノ自然方程式ハ

$$(17) \quad M=0, \quad N=0.$$

然レ $N=0$ ナルトキハ曲線ノ凡テ、切線が *un complexe linéaire* ニ屬スル。(註5) 故ニ “ $\int \sqrt[4]{\rho} du$, *extrémales* ハ、切線が *un complexe linéaire* ニ屬スル W 曲線ナル。”

尚コノ 場合 = ハ 曲線ノ 微分方程式ハ

$$\frac{d^4 x}{ds^4} = x$$

トナルカフ, X, Y, Z ヲ以テ 曲線上ノ 点ノ 非齊次座標ヲ 表ハ

スコト = スレバ *transformation homographique*
= ヲツテ 曲線ノ 方程式ハ

$$\begin{cases} Y = X^{\frac{1}{2}} \cos\left(-\frac{1}{2} \log X\right), \\ Z = X^{\frac{1}{2}} \sin\left(-\frac{1}{2} \log X\right). \end{cases}$$

ト書クコトガ出來ル。

-
- (註1) J. Kanitani, Sur les repères mobiles attachés à une courbe gauche. (Mem. Ryojun Coll. Eng., VI, 1933, p. 91—113.)
- (註2) É. Cartan, Sur un problème du calcul des variations en géométrie projective plane. (Recueil math. de la Soc. math. de Moscou, 34, 1927, p. 349—363.)
- (註3) M. Tsuboko, Sur la courbure projective d'une courbe. (Mem. Ryojun Coll. Eng., Inouye Comm. Volume, 1934, p. 59—74.)
- (註4) E. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, p. 279.
- (註5) J. Kanitani, loc. cit.