



Title	非同次型線状移動可能函数方程式ニ就イテ（Ⅶ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 125, p. 131-138
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74484
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

559. 非同次型線狀移動可能函数 方程式 = 就イテ (VII)

北 川 敏 男 (阪大)

I. (VI) マデノ結果 = 於テ得ラレタ解ハ, $g(x)$ ヲ *low frequency part* $g_1(x)$, *high frequency part* $g_2(x)$ = 分ケ、各々 = 対応スル解ヲ求メタモ、デアル。ソノ方法 = ヨリ、得ラレタ解 = 多少ノ意味ハアル = シテモ、畢竟特別ナ解 = 止マル。

茲デハ更 = *Operator* Γ = 制限ヲツケルコト = ヨリ、同シ方法ヲ得タ解ノ性質ヲ調べテ見ヨウト思フ。茲デ得タ結果ヲ先ヅ述ベテ置ク。

函数方程式

$$(1) \quad \Gamma f(x) = g(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

= 於テ次ノコトヲ假定スル。

I. 母函数 $G(\lambda) \left(= \int_0^\infty e^{\lambda t} dg(t) \right)$ ノ零点ハ 悉ク純虚数 デアルトスル。

II. $G(\lambda)$ ガ *index* 1 デ區間 $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ デ *O-associated* デアルトシ、 ε ハ如何ニ小ナル正数デアツテモヨイトスル。ソノ意味ハ次ノ如クデアル: 適當ナ *Contours* ノ *sequence* $\{C_r\}$ ガアツテ $r \rightarrow \infty$ ノトキ

$$(2) \quad \int_C \left| \frac{e^{\lambda} g}{\lambda^2 G(\lambda)} \right| |d\lambda| = O(1)$$

($\varepsilon^V \leq \delta \leq 1 - \varepsilon$ = 謝シテ) デアルコトヲ意味スル。

III. $Q^{(V)}(0) = 0$, ($V = 0, 1, 2, \dots, k-1$), $Q^{(k)}(0) \neq 0$ ⁽¹⁾

IV. 半平面 $R(\lambda) \geq \varepsilon$ 並ニ $R(\lambda) \leq -\varepsilon$ = 於テ夫々

$$(3) \quad \frac{1}{Q(\lambda)} = \int_a^\infty e^{-\lambda t} d\alpha(t)$$

$$(4) \quad \frac{1}{Q(\lambda)} = \int_{-\infty}^a e^{-\lambda t} d\beta(t)$$

ナル展開が成立スルトスル。 ε ハ 任意ノ正数デアル。 ⁽²⁾

V. 任意ノ正数 q がアツテ

$$(5) \quad \int_a^\infty |t|^{-q} |d\alpha(t)| < \infty$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^a |t|^{-q} |d\beta(t)| < \infty$$

次ニ與ヘテレタ函数 $g(x)$ = 與シテ次ノコトヲ假定スル。

$$(7) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} g^{(m)}(x) = 0$$

$$(8) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} g^{(V)}(x) = \text{finite} \quad (V = m-k, m-k+1, \dots, m-1)$$

而シテ $m-k > \Delta$ トスル。

然シテ

$$(9) \quad \int_{-\infty}^\infty g^{(m)}(x-t) B_{m-k}^k(t) dt$$

(1) $k=0$ デモヨカラ、コレハ essential + 假定デ + イ。

(2) コノ假定ハアル處デハ (VI) ノヨレヨリモ成イ。

が存在スル。然ルトキニハ、補助函数 $\varphi_A(u)$ ヲ (V) ノ如ク
定義スルトキ

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^{(k)}(0) g_1^{(\nu-k)}(x) \\ + \int_a^{\infty} g_2(x-t) d\alpha(t) \quad (3)$$

ハ、(1) ヲ $-\infty < x < \infty$ ニテ満足シ、コレヲ $f^*(x)$ トオ
ク トキ

$$(11) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{*(m)}(x) = \text{finite}$$

トイフ性質ガアル。

(注意) 以上ノ結果ハ、Nörlundノ定差方程式

$$(12) \quad f(x+1) - f(x) = g(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

ノ主解ニ全ク Analogous ナモノデアアル。コノ場合ニハ、
 $k=1$ デアリ、 $\Delta=1$ デアル。(3), (4) ナル Stieltjes 積
余ハ特ニ級数トシテ表ハサレル。

但シ、注意スベキ相違点トシテハ、上ノ如キ $f^*(x)$ ハ
unique デアルコトガ (12) ノ場合ニハ言ヘルノデアルケレ
ドモ一般ニハソクハ行カナイ。

2. 簡單ニ証明ノ荒筋ヲノベヨウ。 $g_1(x)$ = 関係シタ
部分ハ既ニノベヌコトソノマデヲヨイ。 $g_2(x)$ = 関シタ部分

(3) $g_1(x)$, $g_2(x)$ ノ定義ハ既ニ (V) デ決ヘテアル。

又 $\nu > 0$ ノトキ

$$g_1^{(-\nu)}(x) = \frac{1}{\nu!} \int_0^x g_1(t) (x-t)^{\nu} dt \quad \text{ヲ意味スル。}$$

= 於テハ、容易ニワカル如ク形式的ニ

$$(13) \quad I \left[\int_a^\infty g_2(x-t) d\alpha(t) \right] = g_2(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

ナルコトヲ注意シ、問題ハ

$$(14) \quad \int_a^\infty g_2(x-t) d\alpha(t)$$

ノ存在ニ係ツテケル。サテコレノ存在ト、

$$(15) \quad \int_a^\infty g_2(x-t) d\alpha(t) - \int_{-\infty}^a g_2(x-t) d\beta(t)$$

ノ存在トノ equivalence テアルコトヲ Wiener ノ
法ニヨツテ示スコトが出来ノ。(4)

サテ既ニノベタス如ク

$$g_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty g^{(m)}(x+t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iut}}{(iu)^m} (1 - g_A(u)) du \right\} dt$$

テアルコトカラ、假定 ∇ ニ注意シテ

$$(16) \quad \begin{aligned} p(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iu(x-t)}}{(iu)^m} (1 - g_A(u)) du \right] d\alpha(t) \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^a \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iu(x-t)}}{(iu)^m} (1 - g_A(u)) du \right] d\beta(t) \end{aligned}$$

ノ存在ガワカル。コノ $p(x)$ カ又

$$(17) \quad I p(x) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

テアルコトハソノツクリ方カラ明デアル。

(4) N. Wiener, Journ. Math. Phys. M. I T. (1925)

$f(x)$ が如何ナルモノナルカヲ調べるコトが問題ナル。シカレトキ

$$(18) \quad f(x) = \dot{B}_{m-k}^k(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

トナルコトが示サレル。コレが示サレルトアレバ、前述引用ノ *Wiener* ノ方法ガソノマデアテハマルノデアアル。コトニ $\dot{B}_{m-k}^k(x)$ ハ次ノ如キモノデアアル。

$$(19) \quad \begin{cases} \Gamma \dot{B}_{m-k}^k(x) = 0 & (-\infty < x < \infty) \\ \dot{B}_{m-k}^k(x) = B_{m-k}^k(x) & (0 < x < 1) \end{cases}$$

以上が証明ノ筋デアアル。(18)ヲ示スタトニ、吾々ハ *Cauchy* 級数論ヲ用キナケレバナラナイ。ソレヲ大略次第ヲ述べる。

3. $f(x)$ ハ (17) ヲミタス。ヨツテ *Cauchy* 級数論ニヨリソレハ展開ノ始点 x_0 ニ無関係デアアル。ヨツテ $x_0 = 0$ トシテヨイ。即チ

$$(20) \quad T(x, x_0; f) = T(x, 0; f)$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\lambda x}}{Q(\lambda)} \Gamma_{0, \xi} \left[e^{\lambda \xi} \int_0^{\xi} e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau \right] d\lambda$$

茲ニ於テ吾人ハ

$$(21) \quad h_{\lambda}(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i u \lambda} (1 - g_A(u))}{(i u - \lambda)(i u)^m} du$$

ヲ計算セネバナラナイ。(5) [脚註次頁ニ]

m 回微分ノ後

$$(22) \quad \frac{d^m h_\lambda(\delta)}{d\delta^m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\delta}}{i\omega - \lambda} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} \frac{e^{i\omega\delta} g_A(\omega)}{i\omega - \lambda} d\omega$$

ソコデ

$$(23) \quad \phi(\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} g_A(\omega) e^{i\omega\delta} d\omega$$

トオクトキ

$$\phi(\delta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i}{\delta} \right)^p \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} g_A^{(p)}(\omega) e^{i\omega\delta} d\omega$$

カカラ

任意ノ $p = \text{對シテ}$

$$(24) \quad \phi(\delta) = o\left(\frac{1}{\delta^p}\right)$$

トナル。依ツテ

$$(25) \quad \phi_*^{(-\nu)}(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} \phi(\tau) \frac{(\delta - \tau)^\nu}{\nu!} d\tau$$

$$(26) \quad \phi_{**}^{(-\nu)}(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} \phi(\tau) \frac{(\delta - \tau)^\nu}{\nu!} d\tau$$

ガスベテノ $\nu \geq 0$ = 對シテ存在スル。Laplace 積分ノ
理論 = ヨツテ

(5) $g_A(\omega)$ ヲ $m = \text{depend}$ シタカガアツテ $g_A^{(p)}(\omega) = 0$

トスレバ該ハ簡單デアルケレドモ、ソレデハスベテ、 $m = \text{無}$
関係ナーツノ解ノ formula ヲ與ヘルコト = ナラナイ。ソコデ
(VI) トハ別 = 計算スルワケデアル。

$$\begin{aligned}
 (27) \quad h_{\lambda}^{(m)}(s) &= \begin{cases} -e^{\lambda s} \int_s^{\infty} \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau & [s < 0] \\ -e^{-\lambda s} - e^{\lambda s} \int_s^{\infty} \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau & [s > 0] \end{cases} & R(\lambda) > 0, \text{トキ} \\
 &= \begin{cases} -e^{-\lambda s} + e^{\lambda s} \int_{-\infty}^s \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau & [s < 0] \\ e^{\lambda s} \int_{-\infty}^s \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau & [s > 0] \end{cases} & R(\lambda) < 0, \text{トキ}
 \end{aligned}$$

トナル。 $h_{\lambda}(s) \rightarrow 0$ ($|s| \rightarrow \infty$, トキ) + ルコト = 注意シテ 進
ンデ 次ノ 結果 = 至ル。

$R(\lambda) > 0, s < 0$ トスルバ

$$(28) \quad h_{\lambda}(s) = - \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^{\nu}} + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}} \int_s^{\infty} \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau$$

$R(\lambda) > 0, s > 0$ トスルバ

$$\begin{aligned}
 (29) \quad h_{\lambda}(s) &= (-1)^{m+1} \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^m} - \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^{\nu}} \\
 &\quad + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}} \int_s^{\infty} \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau
 \end{aligned}$$

$R(\lambda) < 0, s < 0$ トスルバ

$$\begin{aligned}
 (30) \quad h_{\lambda}(s) &= (-1)^m \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^m} - \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^{\nu}} \\
 &\quad + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}} \int_{-\infty}^s \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau
 \end{aligned}$$

$R(\lambda) < 0, s > 0$ トスルバ

$$(31) \quad h_{\lambda}(\lambda) = - \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(\lambda)}{\lambda^{\nu}} + \frac{e^{\lambda \delta}}{\lambda^{m+1}} \int_{-\infty}^{\delta} \phi(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau$$

トナル。 (28) — (31) ヲバ、 (20) = A_{λ}^{δ} ナル。 然ルトキ

$$(32) \quad T(x, 0; \rho) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda) \lambda^m} d\lambda$$

トナル。

$\mathbb{C}$ ヲ今、原点ヲ中心トシ、半径 1 ヲリ小ナル円周トスル
トキ

$$(33) \quad T(x, 0; \rho) = B_{m-k}^k(x)$$

トナルコトヲ (32) ハ示シテ可ル。 $0 < x < 1$ トキデアイル。

(33) ト (19) トカラモトメルト、即チ (18) ヲ結論シヨイル。