OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	單純群ノ一ツノ class ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 126, p. 143-146
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74487
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

562. 單純群ノ一ツノ Class ニ就テ

吉田 耕作 (阪大)

自分自身及ビ單位群以外ニ Lie ノ意味ノ Normalteiler ヲモタナイ Lie 群ヲ L-simple デアルト呼ブコトニスル。之レニ對シテ普通ノ群論的ナ意味デ simple ノ群ヲ g-simple デアルト呼ベウ。L-simple ナ群ガ semi-simple デアレバ即チソノ center ガ discrete ナラバ此ノ群ハ g-simple ナ群ニ locally topologically isomorphic デアル。

次ニ斯ル g-simple ナ Lie 群ヲ purely algebraic ニ characterise デキルコトヲ示シタイト思フ。

I. 假定。 抽象群 $\mathfrak{G}$ ヲ g-simple トスル。$a \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ

$$\prod_{i=1}^{n}\left[c_i(b_i a b_i^{-1} a^{-1})c_i^{-1}\right] \quad (n\text{ハ或 fixed integer})$$

ノ形ニ書ケル $\mathfrak{G}$ ノ要素全体ノ集合ヲ $\mathfrak{M}(a)$ ヲ以テ表ハス。然ラバ $\mathfrak{M}(a) \ni e$ ($\mathfrak{G}$ ノ單位) 且ツ $\mathfrak{G}$ ガ g-simple ナコトカラ $a \neq e$ ノトキハ $\mathfrak{M}(a) \neq e$. コンデ次ノ假定ヲスル。

1) 任意ノ $a \neq e$ ニ對シテ

$$\mathfrak{M}(a) \supseteq \left[\mathfrak{M}(a')\right]^{-1} \quad (\mathfrak{M}(a')\text{ノ要素ノ逆要素ノ集合})$$

$$\mathfrak{M}(a) \supseteq \left[\mathfrak{M}(a'')\right]^{2} \quad (\mathfrak{M}(a'')\text{ノ任意ノ二要素ノ積ノ集合})$$

ヲ滿足スル如キ $a' \neq e$, $a'' \neq e$ ガ存在スル。

2) 次ノ條件ヲ満足スル可附番点列 $\{a_i\}$, $a_i \neq e$ が存在スル。

(α) $\mathfrak{M}(a_i) \supseteq \mathfrak{M}(a_{i+1})$

且ツ $\mathrm{Durchschnitt}\{\mathfrak{M}(a_i)\} = e$

(β) 任意ノ $\mathfrak{M}(a)$, $a \neq e$ ニ對シテ充分 i ヲ大キクトレバ

$$\mathfrak{M}(a) \supseteq \mathfrak{M}(a_i)$$

3) 各 $\mathfrak{M}(a_i)$ ニ對シテ適當ニ $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ih(i)}$ ヲトレバ

$$\mathfrak{O}_f = \sum_{k=1}^{h(i)} \{a_{ik} \cdot \mathfrak{M}(a_i)\}$$

4) 各 $\mathfrak{M}(a_i)$ ヨツテ $\mathfrak{O}_f$ ガ generate サレル。即チ $\mathfrak{O}_f$ ノ任意ノ要素ハ $\mathfrak{M}(a_i)$ ノ要素有限コヲ compose シタモノトシテ得テレル。

II. 結論. $\{\mathfrak{M}(a)\}$ ヲ e ノ近傍系; $\{b \cdot \mathfrak{M}(a)\}$ ヲ b ノ近傍系トスレバ 1), 2) ニヨリ $\mathfrak{O}_f$ ハ topological group ヲ作ル。コノ top. g. $\mathfrak{O}_f$ ハ 2) ニヨリ第一可附番公理ヲ満足スルカラ metrisierbar (角谷靜夫氏定理——學士院記事, 1936, p. 82) 且 $b\mathfrak{M}(a)b^{-1} = \mathfrak{M}(a)$ カラソノ距離ハ

(米) $d(a, b) = d(caf, cbf)$

ヲ満足スルヤウニトレル。3) ニヨレバコノ metrical group ハ totally bounded デアル。

ヨツテ $\mathfrak{O}_f$ ノ abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{O}_f}$ (D. van

Dantzig ノ所謂 Kompletierung）ヲ考ヘレバ compact metrische + group = ナル。

$\overline{\mathfrak{G}}$ ハ4)ト同ジ條件ヲ満足スルカラ connected + コトガワカル。故= $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ connected, compact 且ツ separable + 群デアリ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ = 於テ dense + subgroup デアル。

結論ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ connected, compact 且ツ 2-simple + Lie 群 = locally topologically isomorphic ト云フノデアル。（特= 有限次元 = ナルコト= 注意サレタイ）

III 証明. $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ connected, compact 且ツ separable ダカラ connected, compact + Lie 群ノ系列 $\{\mathfrak{G}_i\}$ ヲ以テ G_n-adic = generate サレル。(H. Freudenthal, Ann. of Math. 1936, p. 57) 即テ $\mathfrak{G}_i$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ = continuous homomorphic デアリ

$$\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{H}_i \approx \mathfrak{G}_i \quad \text{(topological isomorphism)}$$

デ定義サレルヤウナ $\overline{\mathfrak{G}}$ =於イテ 閉ヂタ Normalteiler $\mathfrak{H}_i$ ハ

$$\mathfrak{H}_i \supseteq \mathfrak{H}_{i+1}, \quad \text{Durchschnitt}_i \{\mathfrak{H}_i\} = e$$

ヲ満足スル。

$\overline{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{G}_i$ ハ compact metrical + group ダカラ cont. homomorphism $\overline{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{G}_i$ ハ open mapping デアル。ヨツテ $\overline{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{G}_i$ = 於テ $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_i'$ トスレバ $\mathfrak{G}_i'$

ハ $\mathfrak{G}_i$ ニ於テ dense（$\mathfrak{H}$ ガ $\overline{\mathfrak{H}}$ デ dense ダカラ）、故ニ $\mathfrak{G}_i'$ ノ abg. Hülle ハ $\mathfrak{G}_i$ 自身デアル。且ツ $\mathfrak{H}_i \to$ ヒカラ $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i'$（$\mathfrak{G}$ ハ g-simple）即チ $\overline{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}_i$

故ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ compact, connected + Lie 群デアル。

$\overline{\mathfrak{G}}$ ハ尚 g-simple ナコトガ上ト同様ニシテ云ヘル。ヨッテ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ center ガ有限群ナコトガ云ヘレバ定理ガ証明サレタコトニナル。

若シ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ center $\mathfrak{Z}$ ガ有限群デナイナラバ、$\overline{\mathfrak{G}}$ ガ compact ダカラ、e ハ $\mathfrak{Z}$ ニ於テ孤立点デナイ。ヨッテ Cartan ノ定理 Mémorial des Sc. Math. XLII p. 22 ニヨリ $\mathfrak{Z}$ ハ少クトモ one-parameter ノ Lie 群ヲ含ム。所ガ 4) ニヨリ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハソノ commutator group ト一致スルカラコンナコトハアリ得ナイ。

N. van der Waerden ノ定理.

g-simple + connected, compact + Lie 群ニハ上ノ如キ topologisierung ガ出来ルト云フノガ van der Waerden ノ定理（M. Z, 1933, p. 780）デアリ上ノ結果ハソノ逆デアル。

ヨッテ g-simple + connected, compact + Lie 群ガ purely algebraic = characterise サレタワケデアル（但シ Komplettierung ナル Process ノ入レノハ問題ノ性質上已ムヲ得ナイ所デアリマセウ）