



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 等角寫像ノ簡單ナーニノ例題                                                               |
| Author(s)    | 黒田, 稻夫                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1937, 126, p. 147-153                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74488">https://doi.org/10.18910/74488</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

### 563. 等角寫像ノ簡單ナ一ニノ例題

黒田 稻夫 (山形)

遠方ノ山々ニハ未ダ雪ガ残ツテキマスガ次第ニ芽ダム春  
ノ陽氣ニ誘ハレルマヽニ次ノヌウナコトラ試ミラミマシタ。  
前期學生ノ方マノ演習問題ノ一ツニデモナリマセウカ。

各平面上ノ二定点  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$ ,  $a > 0$  カラ  
ノ距離ノ積ガ  $b^2$  ニ等シイ点  $P$  ノ軌跡即チ所謂 *Cassinian oval*  
ヲ考ヘ点  $P$  ヲ各デ表シマス

$$b^2 = AP \cdot A'P$$

或ハ

$$b^2 = |z - a| \cdot |z + a| = |z^2 - a^2|$$

デアリマスカラソコデ

$$w = z^2 - a^2$$

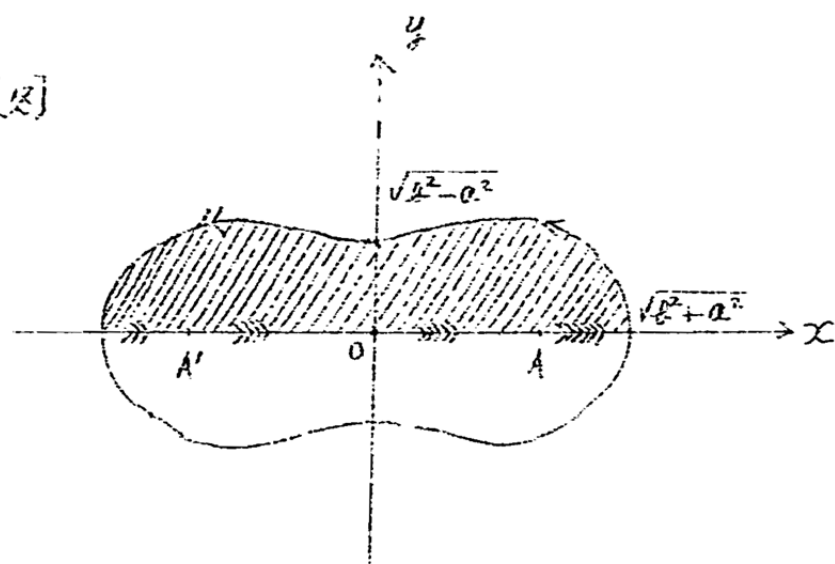
ナル函数ヲ作ツテミマス。然ルトキハコレト今一ツ  $w' = \frac{w}{b^2}$   
カラ得ラレル關係

$$(1) \quad w' = \frac{1}{b^2} (z^2 - a^2)$$

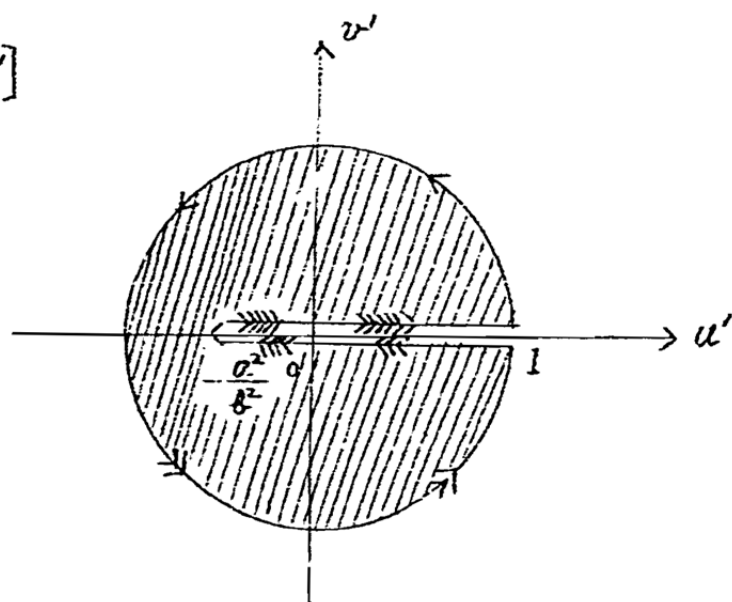
ニヨツテ  $0 < b \leq a$  ナル場合ノ各平面ノ *oval* ノ内部  
ヲ  $w'$  平面ノ單位円内ヘ一對一ニ且ツ等角ニ寫像スルコトガ  
出來マス。

次ニ  $b > a$  ナル場合ニハ先ヅ (1) ニヨツテ次ノ寫像が  
得ラレルコトハ容易ニ知ラレマス。

(2)



$[w']$

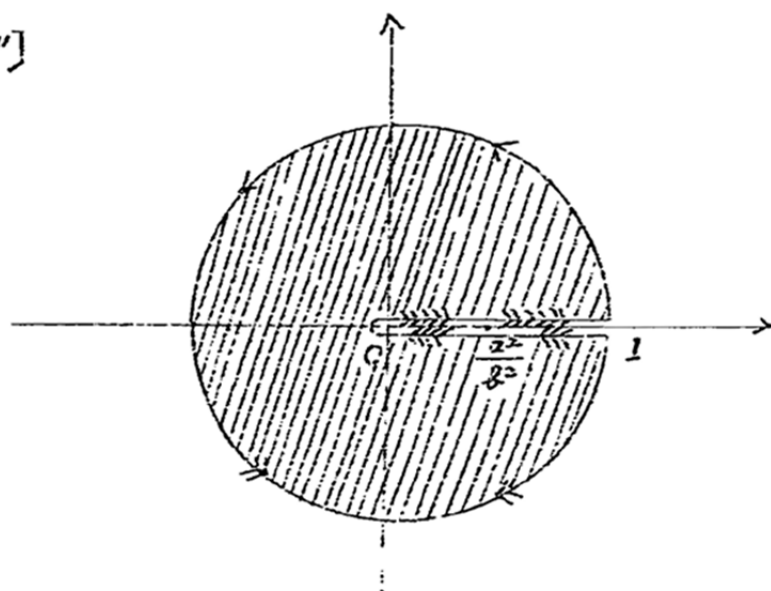


ヨコデ函数

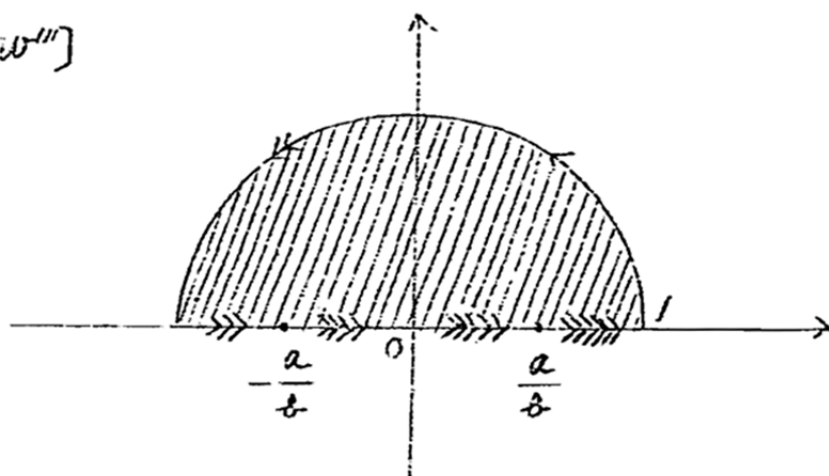
$$(2) \quad w'' = \frac{w' + \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} w' + 1}, \quad w''' = \sqrt{w''}$$

＝ヨツテ  $w'$  平面ノ指楯セラレタ面ハテ次ノ如ク漸次変形シテ行キマス。

$(w'')$



$(w''')$

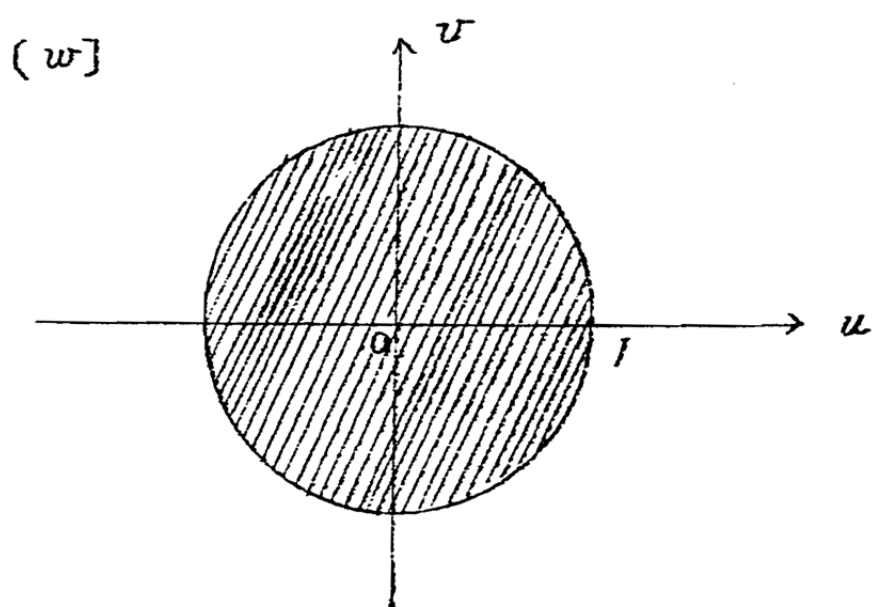
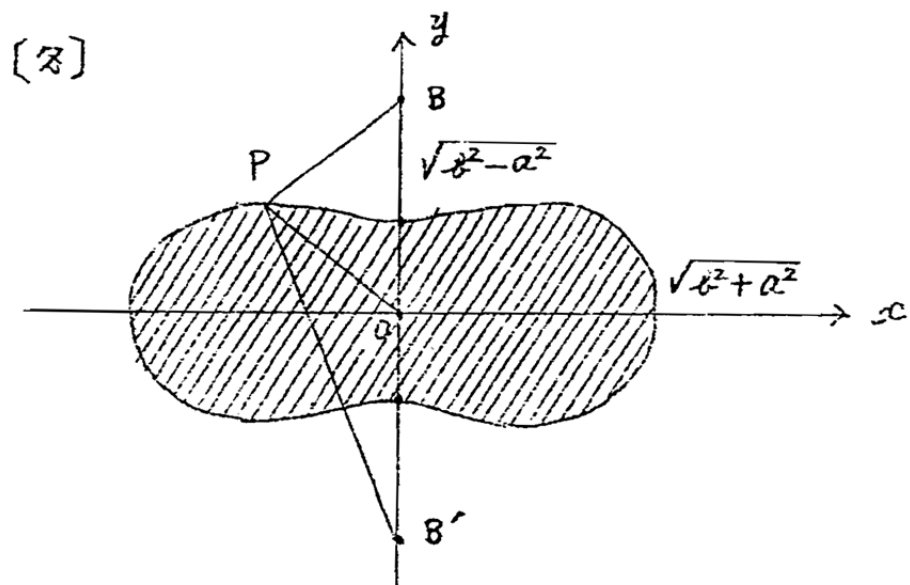


(1), (2) カラ  $w'''$  ト 各ノ関係ヲ求メマス

$$w''' = \frac{\frac{1}{b^2}(z^2 - a^2) + \frac{a^2}{b^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^4}(z^2 - a^2) + 1}} = \frac{bz}{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 + b^4}}$$

トナリマス。ソレ故  $w'''$  ヲ  $w$  ト書改メマス 結局次ノ寫像  
 可得ラレマス。

$$(3) \quad w = \frac{bz}{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 + b^4}}, \quad b > a > 0$$



zが oval を画クトキ (3) = ヌリ wハ單位円ヲ画キマス  
カラ此ノ場合両辺ノ 絶對値ヲ トツテ書直シテミマス

$$\frac{|z|}{\sqrt{\left| z - \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}i \right| \cdot \left| z + \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}i \right|}} = \frac{a}{b}$$

トナリマス,

ソレ故 今各平面上ニ於テ二点

$$B\left(0, \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}\right), \quad B'\left(0, -\frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}\right)$$

ヲ考ヘ oval ノ上ノ一ノ点ヲ P トシマス

$$(4) \quad \frac{OP}{\sqrt{BP \cdot B'P}} = \frac{a}{b} < 1$$

ナル關係が得ラレマス。

尚念ノタメニ一定点  $B(0, c)$ ,  $B'(0, -c)$ ,  $c > 0$  ヲ考ヘ

$$(4)' \quad \frac{OP}{\sqrt{BP \cdot B'P}} = c' < 1$$

ナル關係ヲ満足セシメル点  $P(x, y)$  ノ軌跡ノ方程式ヲ求メ  
テミマス。先ヅ  $c, c'$  ヲ用ヒテ

$$a = \frac{cc'^2}{\sqrt{1 - c'^4}}, \quad b = \frac{cc'}{\sqrt{1 - c'^4}}$$

ナレモノヲ作リマス

$$c = \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}, \quad c' = \frac{a}{b} < 1$$

トナリマスカラ (4)' カラ

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^4}{b^4} \left\{ \left( x^2 + y^2 + \frac{b^4 - a^4}{a^2} \right)^2 - 4 \frac{b^4 - a^4}{a^2} y^2 \right\}$$

コレヲ書直シマス

$$(5) \quad (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4, \quad b > a > 0$$

即ち oval. の方程式トナルコトが看取セラレマス。

次=コレト關聯シテ今  $w$  平面上ノ楕圓  $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ ,  
 $a > b > 0$  , 中心=關スル垂足曲線  $\rho^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$   
ヲ考ヘテ ミマス。

$$\text{コレハ楕圓 } \rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad \text{或ハ}$$

$w_1 = b \cos \theta_1 + i a \sin \theta_1$  , 又  $\rho_2 = \sqrt{ab}$  = 關スル  
相及曲線ガ

$$\rho = \frac{ab}{\rho_1}$$

ナレ關係ガアリマスカラコレヨリ暗示ヲ受ケテ

$$w = \frac{ab}{w_1}$$

$$= \frac{ab}{b \cos \theta_1 - i a \sin \theta_1}$$

$$= \frac{ab}{b \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) - i a \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)},$$

$$z = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1,$$

$$= \frac{-2abz}{(a-b)z^2 - (a+b)}$$

ナル函数ヲ作ツテミマス。ト之レニヨツテ次ノ寫像が得テレル  
コト=ナリマス。

$$(b) \quad w = \frac{-2abz}{(a-b)z^2 - (a+b)}, \quad a > b > 0$$

