



Title	二重ノ近傍系ニヨル収斂ノ定義ニ就テ, I
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 127, p. 162-167
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74492
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

567. 二重ノ近傍系ニヨル收斂ノ定義ニ就テ, I

角 谷 静 夫 (阪大)

1. 空間 R ノ各点 a = 對シテ ソノ近傍系 $\{U(a)\}, \{V(a)\}$ が與ヘラレテ、コレヲハ夫々次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

1-1° 任意ノ $U(a)$ ハ a ヲ含ム。

1-2° 任意ノ $U_1(a), U_2(a)$ = 對シテ $U_3(a)$ が存在シテ $U_3(a) \subset U_1(a) \cdot U_2(a)$ トナル。

1-3° 任意ノ $a, b (a \neq b)$ = 對シテ $U(a) \cdot U(b)$ トナル如キ近傍 $U(a), U(b)$ が存在スル。

2-1° 任意ノ $V(a)$ ハ a ヲ含ム。

2-2° 任意ノ $V_1(a), V_2(a)$ = 對シテ $V_3(a)$ が存在シテ $V_3(a) \subset V_1(a) + V_2(a)$ トナル。

2-3° 任意ノ $a, b (a \neq b)$ = 對シテ $b \in V(a)$ トナル $V(a)$ が存在スル。

此ノ如キ近傍系ヲ持ツタ空間 R = 於テ 点列 $\{a_n\}$ が a = 收斂スルトイフノハ、スベテノ a_n ヲ含ム $V(a)$ ガリクトモ一ツ存在シテ、且ツ任意ノ $U(a)$ カ殆ンドスベテノ a_n ヲ含

ムコトデアルト定義スル。

コレヲ $\cup \nabla$ -収斂ト名付ケ $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ スハ

$a_n \xrightarrow[\cup \nabla]{} a$ ニヨツテ表ハス。

コノ $\cup \nabla$ -収斂ガ次ノ性質ヲ持ツコトハ明カデアイル。

(1) $a_n = a, n = 1, 2, \dots$ ナラバ $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(2) $\cup \nabla \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ナラバ任意ノ部分列 $\{a_{k_n}\} =$

對シテ $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$ デアル。

(3) $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ナラバ $a = b$

デアイル。即チ一ツノ点列ハ二ツノ異ナル点ニ同時ニ
収斂スルコトハ出来ナイ。

(4) $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ ナラバ
 $C_{2n-1} = a_n, C_{2n} = b_n$ ニ對シテ $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = a$
デアイル。

以上ハ何レモ普通ノ収斂ノ時ト同シ性質デアイル。更ニ次ノコ
トモ明カデアイル。

(5) $\cup \nabla - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ナラバ $\cup - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ デアル。

但シコノ $\cup - \lim$ ハ普通 $= \{\cup(a)\}$ 、ミニヨツテ

定義サレル近傍空間ニ於ケル収斂ヲ表ハス。

此ノ如ク収斂ガ定義サレタ空間ヲ $\cup \nabla$ -空間ト呼ビコノ空間ノ
性質ヲ調べル。コノタメニ $\{\nabla(a)\}$ ガ次ノ性質ヲ持ツテキ
ルコトヲ假定スル。

(*) $\{U(a)\}$ ノウチニ可附番個ノ $\{V_n(a)\}$ ($n=1, 2, \dots$)
ガ存在シテコレガ

$$V_1(a) \subset V_2(a) \subset \dots \subset V_n(a) \subset V_{n+1}(a) \subset \dots$$

ヲ満足シ且ツ任意ノ $V(a)$ ニ對シテ n ガ定マリ

$$V(a) \subset V_n(a) \text{ トナルモノトスル。}$$

コノ性質ハ Hausdorff ノ第一可附番公理ニ相當スルモノ
ナルカラ之レヲ äusseres Abzählbarkeitsaxiom ト
名付ケル。コノ Axiom ガ満足サレテキルコトハ非常ニ大
切ナコトヲ後ヲ示スゴトクコノ Axiom ヲ満足シテ UV -
空間ニハ 幾ツタモノガ存在スル。

先ツ äusseres Abzählbarkeits axiom ヲ満足ス
ル空間ニ於テハ適當ニ新シイ近傍系 $\{O(a)\}$ ヲ定義スレバ
 $O(a) = \text{ヨツテ定義サレタ收斂ト上記ノ } UV\text{-收斂トが一致}$
スルコトヲ示サウ。

カナル $O(a)$ ハ次ノ如ク定義スレバヨイ。各々ノ n ニ對
シテ任意ニ $U_n(a)$ ヲ取り

$$O(a) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a) \cdot V_n(a)$$

トオク。 $U_n(a)$ ノ取り方ハ各々ノ n ニ對シテ全ク任意ナル
カラ、若シ $\{U(a)\}$ ノ Mächtigkeit ヲ UL デ表ハセ
バ $\{O(a)\}$ ハ Mächtigkeit ハ $UL^{\aleph_0}$ デアル筈ナル。
此ヲ如ク定義サレタ近傍 $O(a)$ ガ近傍トシテノ普通ノ性質
 $1-1^\circ, 1-2^\circ, 1-3^\circ$ ヲ満足シテキルコトハ明カナル。シカ
シ Hausdorff ノ四番目ノ條件:

1-4° 任意ノ $O(a)$ 及ヒ $b \in O(a)$ ナル任意ノ $b =$ 対シ
テ $O(b) \subset O(a)$ ナル $O(b)$ が存在スル。

ハタトヘコレが始メノ $\{U(a)\} =$ 対シテ成立シテキル場合
ガモ $\{O(a)\} =$ 対シテハ成立シナイ。

又 $\{U(a)\}$ が Hausdorff ノ第一可附番公理ヲ満
足シテキラモ $\{O(a)\}$ ハソレヲ満足スルトハ限ラナイ。

次ニ $\{O(a)\} =$ ヨル収斂ノ定義ト UV -Konvergenz
トが同等デアルコトヲ示サシ。

(i) $a_n \xrightarrow{UV} a$ ナラバ任意ノ $O(a)$ ハ殆ンドスベテノ a_n
ヲ含ムコト。

$a_n \xrightarrow{UV} a$ ナル故少クトモ一ツ $V(a)$ が存在シテコレハ
スベテノ a_n ヲ含ンデキル。 äusseres Abzählbarkeits
axiom ヨリ $V(a) \subset V_{n_0}(a)$ トナル如キ n_0 が存在スル。
然ルニ又 $a_n \xrightarrow{UV} a$ ヨリ任意ノ $U(a)$ ハ殆ンドスベテ
ノ a_n ヲ含ムカラ $U_{n_0}(a)$ ヲ如何ニトツテモ $U_{n_0}(a) \cdot V_{n_0}(a)$
ハ殆ンドスベテノ a_n ヲ含ム。ヨツテ勿論任意ノ

$$O(a) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a) \cdot V_n(a)$$

ハ殆ンドスベテノ a_n ヲ含ム。

(ii) $a_n \not\xrightarrow{UV} a$ ナラバ少クトモ一ツノ $O(a) =$ 対シテ
無限ニ多クノ a_n が $O(a)$ ニ属シナイコト。

コレハ次ノ二ツノ場合ニツケテ考ヘル。

(a) a_n ヲスベテ含ム $U_{n_0}(a)$ が存在スルトキ。

$a_n \not\xrightarrow{UV} a$ ヨリ少クトモ一ツノ $U_0(a)$ が定マリ

$U_0(a)$ = 属シナイ a_n が無限 = 存在スル。今各 n 、
 n = 対シテ $U_n(a) = U_0(a)$ トオケバ。

$$\begin{aligned} O(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a) \cdot V_n(a) = U_0(a) \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a) \\ &= U_0(a) \end{aligned}$$

トナリ明カ = $O(a)$ = 属シナイ a_n ハ無限 = 澤山存在スル。

(b) 各 n 、 n = 対シテ $V_n(a)$ = 属シナイ a_{k_n} が少クト
 モーツ存在スルトキ。

äusseres Abzählbarkeits axiom ヨリ

$\{a_{k_n}\}$ ハ無限 = 多クノ異ル点ヲ持ツテキル。

今各 n 、 n = 対シテ $U_n(a)$ ヲ、コレが $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}$
 ヲ何レモ含マナイヤウニトレバ

$$O(a) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a) \cdot V_n(a)$$

ハ a_{k_n} ノ点ヲ一ツモ含マナイ。(何トナレバ $a_{k_n} \in U_m(a)$
 $V_m(a)$ ナラバ一チ $a_{k_n} \in U_m(a)$ ヨリ $n > m$ デナケレ
 バナラズ、他方 $a_{k_n} \in V_m(a)$ ヨリ $n < m$ デナケレバナラ
 ヌカラ)。

ヨツテ $O(a)$ = 属シナイ a_n が無限 = 澤山存在ス
 ル。

以上ノ事實ヨリ次ノコトガワカル。

(6) $a_n \not\rightarrow_{UV} a$ ナラバ $\{a_n\}$ ノ部分列 $\{a_{k_n}\}$
 が存在シテコノ如何ナル部分列 $\in a = UV$ - 収

敏シナイ。