



Title	Polygenic function ノ rectilinear derivativeニツイテ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 127, p. 167-174
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74493
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

568. Polygenic function, rectilinear derivative $\equiv \nabla \text{イテ}$

井上 正雄 (阪大)

Polygenic function $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$,
 $z = x + iy$, rectilinear n -th derivative ∇

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}$$

トスレバ

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dz^n_\theta} &= (\bar{\partial} + \partial e^{-2i\theta})^n f(z) \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \bar{\partial}^r \partial^{n-r} (f(z)) e^{-2(n-r)i\theta} \end{aligned}$$

但シ $\partial = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right]$

依ッテ今 $\binom{n}{r} \bar{\partial}^r \partial^{n-r} = g_{n-r}$ トスレバ

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta} = \sum_{r=0}^n g_r(z) e^{-2ri\theta}$$

即チ $\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}$

ハ一ツ, centerfunction g_0 ト n 個, phasefunction

$g_r (r=1, 2, \dots, n)$ は依ッテ合成サレル。以後コノ
關係ヲ

$$D^n f = \frac{d^n f}{dz^n} = r_n(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

ヲ表ハス。⁽¹⁾

或ハ

$$\left(\frac{n-r}{n} g_r + \frac{r+1}{n} g_{r+1} e^{-2i\theta} \right) = r \left(\frac{n-r}{n} g_r, \frac{r+1}{n} g_{r+1} \right) = \Gamma_{r+1}$$

トスレバ

$$\frac{d^n f}{dz_\theta^n} = \sum_{r=1}^n \Gamma_r e^{-2(n+1)i\theta}$$

トナル。

即チ n 個ノ fundamental (-circular) function Γ_r
($r=1, \dots, n$) = 依ッテモ決定サレルカラ コノ關係ヲ

$$D^n f = \frac{d^n f}{dz^n} = \sigma_n(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$$

ヲ表ハス。

特ニ $n=1$ トキハ $\frac{df}{dz_\theta} = g_0 + g_1 e^{-2i\theta}$ トナルカ
ラ $Df =$ ヨリ point-circle ノ對應——所謂 Kasner ノ
clockmotion——ガ得テレ、 θ が $0 \rightarrow 2\pi$ ト移動スレ
バ $\frac{df}{dz_\theta}$ ハ逆ノ方向ニ 2 倍ノ速度ヲ g_0 ヲ中心トシ $|g_1|$ ヲ
半径トスル円ヲニ周スル。

$n=2$ トキハ

$n=1$ ノトキハ之レヲ省略スル、又 $D^0 f = f$ トレテオク。

$$\frac{d^2 f}{d\mathcal{Z}_\theta^2} = g_0 + g_1 e^{-2i\theta} + g_2 e^{-4i\theta}$$

トナルカラ

$$\frac{d^2 f}{d\mathcal{Z}_\theta^2}$$

ハ $(g_0 + g_2 e^{-4i\theta})$ 7 basicircle トシ $|g_1|$ 7 determining-length トスル limaçon 7 画⁽²⁾。

ルカワ

$$g_j = r_j e^{i\theta_j},$$

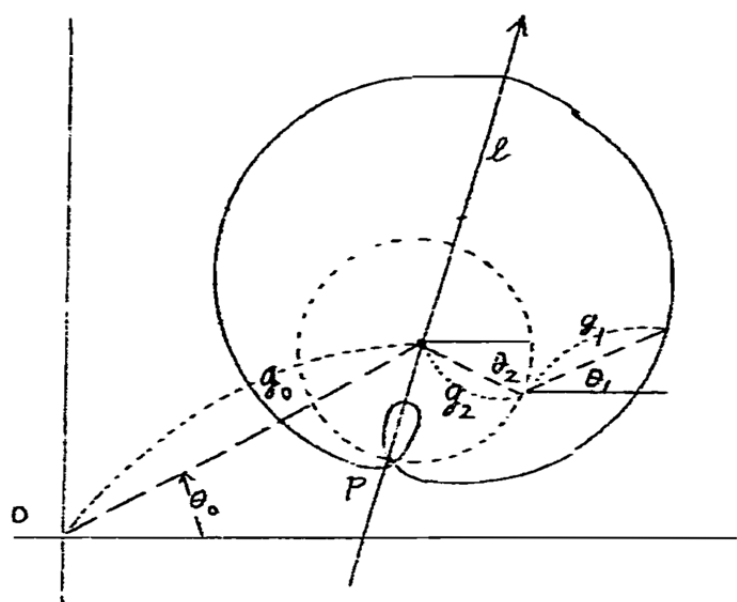
$$|\theta_j| \leq \pi (j=0,1,2)$$

トスレバ, コノ

limaçon, normal formハ

$$\rho = r_1 + 2r_2 \cos \theta \quad (H)$$

トナル。



尚又 Pole ハ $p(r^*, \theta^*) = r_0 e^{i\theta_0} + r_2 e^{i(2\theta_1 - \theta_2 + \pi)}$,
initial line. P 7 通ツテ argument カ $\omega = 2\theta_1 - \theta_2$
ナル半直線トナル. [Symmetric axis l , 方程式ハ
 $\rho \sin(\omega - \theta) = r^* \sin(\omega - \theta^*)$ ナル]

カワテ上述ノ (H) ハ

$$(H) = 2(\omega - \theta) \text{ヲ満足スルコトがワカル。}$$

(2) E. Kasner: The second derivative of a Poly. fu.

Trans. A. M. S. 30 (1928)

以上より, $D^2 f = \text{ヨリ}$, 一般 = ハ⁽³⁾ point-limaçon, 対応が得られ, θ が $0 \rightarrow 2\pi$ と動けば $\frac{d^2 f}{d\alpha_\theta^2}$ ハ P を中心トシテ測ツタ 2 倍ノ角速度デコノ limaçon ヲ逆方向ニ二周スル。

$n \geq 3$ ノトキモ矢張り, $D^n f = \text{ヨリ}$. 更ニ複雑ナル point-element, 対応が得ラレル。

次ニカナル $D^n f = \text{ヨリ}$ point-element, 対応ノ characterization ノ問題ヲ考ヘル: 即チ先ツカナル point-element ノ対応ヲ支ヘタトキコレヲ $\frac{d^n f}{d\alpha_\theta^n}$ トシテモツ polygenic function f ノ存在スルタメノ必要且ツ充分ナル条件ヲ求メル。

之レニ関シテ次ノ定理が成立スル。コレハ Kasner ノ論文⁽⁴⁾ニヲケル結果ノ一ツノ拡張デアアル。
定理。

$g_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) ヲ Polygenic function トスルトキ

$$D^n f(x) = r_n(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

$$D^r f(x_0) = r_n(a_{r0}, a_{r1}, \dots, a_{rn})$$

$$(r=0, 1, \dots, n-1)$$

(3) “一般 = ハ”ト云ツタハ limaçon が degenerate シテ点或円トナリ速度ノ関係が保タレナイ場合ガアルカラデアアル。

(4) E. Kasner: A complete charact. of the deriv. of a poly. fn.

Proc. Nat. Acad. Sci. v. 22, 1936

ヲ満足スル Polygenic function $f(z)$ が存在スルヌメ
ノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$(n-r) \alpha'(g_r) = (r+1) \overline{\alpha'}(g_{r+1})$$

$$(r=0, 1, \dots, n-1)$$

が成立スルコトデアル。尚コノトキ $f(z)$ ハ z_0 ノ近傍デ一
意的ニ定ル。

但シ $a_{rs} (r, s=0, 1, \dots, n-1; r \leq s)$ ハ任意ノ有
限ナル実数又ハ虚数トス。

(証) 帰納法ニヨツテ証明スル。以下スベテ局部的ニ考察
スル。

$$n=1 \text{ ノトキ} \quad (4)$$

必要ナルコト $f = u + iv, g_r = p_r + i\psi_r (r=0, 1)$

トスルトキ

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz_0} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} e^{-2i\theta} \\ &= (p_0 + i\psi_0) + (p_1 + i\psi_1) e^{-2i\theta} \end{aligned}$$

トナルカラ、コレヨリ簡單ナル計算ニヨリ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 - \psi_0) &= \frac{\partial}{\partial y} (p_0 + p_1) \\ \frac{\partial}{\partial x} (p_0 - p_1) &= \frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 + \psi_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ヲ得ル。

$$\text{之レヨリ直チニ} \quad \alpha'(g_0) = \overline{\alpha'}(g_1)$$

充分ナルコト

$$\mathcal{U}(g_0) = \overline{\mathcal{U}}(g_1)$$

ヨリ (1) が出ルカヲ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u &= g_0 + g_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} u = \psi_1 - \psi_0, \quad u(x_0, y_0) = \mathcal{R}(a_{00}) \\ \frac{\partial}{\partial x} v &= \psi_0 + \psi_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} v = g_0 - g_1, \quad v(x_0, y_0) = \mathcal{J}(a_{00}) \end{aligned} \right\}$$

ヲ満足スル $u(x, y)$, $v(x, y)$ が (一意的) = 存在スル。

ヨツテ $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ トスレバ之レが求

ム *Polygenic function* デアル。カナル $f(z)$ が唯一
ツ存在シ得タイコトハヨク知ラレタトコロデアル。

次 = $n = p-1$ 迄成立シタトシ $n = p$ ノトキ 矢張り成
立スルコトヲ証明シテ。

必要ナルコト

$$D^{p-1} f(z) = \gamma_{p-1}(h_0, h_1, \dots, h_{p-1})$$

トスレバ

$$(p-1+r) \mathcal{U}(h_r) = (r+1) \overline{\mathcal{U}}(h_{r+1}) \quad (r=0, 1, \dots, p-2) \dots (2)$$

が成立スル。

更 =

$$D^p f(z) = D \gamma_{p-1}(h_0, h_1, \dots, h_{p-1}) = \gamma_p(g_0, g_1, \dots, g_p)$$

之レヨリ

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathcal{U}}(h_0) &= g_0 \\ \overline{\mathcal{U}}(h_{r+1}) + \mathcal{U}(h_r) &= g_{r+1} \quad (r=0, 1, \dots, p-2) \\ \mathcal{U}(h_{p-1}) &= g_p \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ヲ得ル。 (2) 及 (3) ヨリ 直チ =

$$(p-r) \mathcal{D}(g_r) = (r+1) \overline{\mathcal{D}}(g_{r+1}) \quad (r=0, 1, \dots, p-1) \quad (4)$$

が成立スル。

充分ナルコト

(4)が成立スルカラ

$$Dh_r(z) = \delta \left\{ \frac{p-r}{p} g_r, \frac{r+1}{p} g_{r+1} \right\}$$

$$h_r(z_0) = a_{p-1, r} \quad (r=0, 1, \dots, p-1)$$

ヲ満足スル polygenic function $h_r(z)$ が (一意的 $\Rightarrow$) 定ル。

コト $h_r(z) =$ 対シテハ

$$\mathcal{D}(h_r) = \frac{r+1}{p} g_{r+1}$$

$$\overline{\mathcal{D}}(h_{r+1}) = \frac{p-1-r}{p} g_{r+1}$$

トナルカラ

$$(p-1-r) \mathcal{D}(h_r) = (r+1) \overline{\mathcal{D}}(h_{r+1}) \quad (r=0, 1, \dots, p-2)$$

が成立スル。ヨツテ

$$D^{p-1} f(z) = \delta_{p-1} (k_0, k_1, \dots, k_{p-1})$$

$$D^r f(z_0) = \delta_r (a_{r0}, a_{r1}, \dots, a_{rn})$$

$$(r=0, 1, \dots, p-2)$$

ヲ満足スル polygenic function $f(z)$ が (一意的 $\Rightarrow$) 定ル。

之レが求ムル函数デアル。カナル函数 $f(z)$ の一意性モ亦明カデアル。 (証了)

尚又、定理ノ條件ハ次ノヤウニ書き換ヘルコトガ出來ル。⁽⁴⁾

$\Gamma = \gamma(h_0, h_1)$ ヲ與ヘタトキノ任意ノ点 z ニ關シテ、 z ノ近傍ト $(h_0 + h_1)$ ノ近傍トノ間ニ次ノ如キ對應ト —— コレヲ *associated affinity* トヨブ —— ヲ著ヘル。

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_0(z) &= h_0(z + \Delta z) - h_0(z) \\ \bar{\Delta} h_1(z) &= h_1(z + \bar{\Delta} z) - h_1(z) \end{aligned} \right\} \text{トシ}$$

$$T(z + \Delta z) = h_0(z) + h_1(z) + \Delta h_0(z) - \bar{\Delta} h_1(z)$$

トスルトキ

定理ノ條件ハ次ノ條件ト同値デアアル。

$${}^{(4)} \quad \gamma_n(g_0, g_1, \dots, g_n) = \sigma_n(I_1, I_2, \dots, I_n)$$

トスルトキ I_i ($i=1, 2, \dots, n$)ノ *associated affinity* T_i ガ *direct similarity* (*conformal*)デアアル。”

以上テ $D^n f$ ガソノ *fundament(-circular) function*ノ *affine-similitude* テ *characterize* サレルコトガ解ル。(了)