



Title	Lieノ第二基本定理ニ関聯シターツノ問題
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 128, p. 179-185
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74496
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

571. Lie の第二基本定理 = 関聯シタ ーツノ問題

吉田 耕作 (阪大)

複素数体ノ上ノ n 次ノ行列 $A = \|a_{ij}\|$ ノ作ル ring ヲ R トスル。

$$\text{絶對值 } |A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} = \exists \text{ ヲテ } R = \text{topology が}$$

導入サレル。 R ノ部分集合 O_f が matrix 乗法 = 對シテ群ヲ作ルトキ, O_f ハ上ノ topology = $\exists$ ヲテ topological group = ナル。 O_f が次ノ條件ヲ満足スルトキ = Lie 群 ト呼バコト = スル。

- 1) 實數ヲ係數トシテ一次独立ナ $X_1, X_2, \dots, X_m (\in R)$ が存在シ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^m t_i X_i\right) \in O_f, \quad t \text{ real}$$

- 2) 充分小サナ正數 ε ヲトレバ, $|A - E| \leq \varepsilon$ ($E \in R$ ノ單位行列), $A \in O_f$ ナル A ハ uniquely =

$$A = \exp\left(\sum_{i=1}^m t_i X_i\right), \quad t \text{ real.}$$

ト表ハサレル。

$$\text{但シ } \exp(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}$$

然ラバ O_f が Lie 群ナルタメノ必要條件ハ O_f が locally

compact ナコトデアアル。(本紙談話 参照, 但シ discrete group ナモ Lie 群ト呼バコト=スル)

Of が Lie 群ナラバ, $\sum_{i=1}^m t_i X_i$, t real, ナル形, element 全体 $\mathcal{J}$ ハ次ノ条件ヲ満足スル。

(α) $\mathcal{J}$ ハ real linear space ナ有限ナ base (with real coefficients) ナ有スル。即チ $X_1, X_2, \dots, X_m$ 。

(β) $[X, Y] = XY - YX$ ハ X, Y ト共 $\mathcal{J}$ = 属スル。

此ノ $\mathcal{J}$ ナ Lie 群 Of, Lie ring ト呼ブ。ニツノ ring operations, vector-addition ト commutator-multiplication $[X, Y]$ デアル。 $\mathcal{J}$ ハ $\lim_{i \rightarrow \infty} (A_i - E/\varepsilon_i)$ ($A_i \in \text{Of}$, ε_i real 且 $A_i \neq E$, $\varepsilon_i \neq 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = E$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$) = 依ツテ定義サルル如キ Of ノ E = 於ケル微分商ノ集合デアアル (本紙談話)。

今逆 = (α) 及ビ (β) ナ満足スル R ノ subset $\mathcal{J}$ が a priori = 與ヘアレタトキ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^m t_i X_i\right) \quad (t \text{ real 且 } \sum_{i=1}^m |t_i| < \varepsilon, \varepsilon > 0)$$

ナル形, R ノ element 全体ノ集合ヲ $\overline{\text{Of}}$ トスレバ $\overline{\text{Of}}$ ハ所謂 Lie 群芽 デアル。即チ $X, Y \in \overline{\text{Of}}$ ガ充ル E = 近ケレバ X^{-1} 及ビ $XY \in \overline{\text{Of}}$ 。

之レガ Lie ノ第二基本定理デアアル。ソコデ $\overline{\text{Of}}$ ノ要素有限個ノ積及ビ斯ル積, limes (但シ non-singular

ナモノトミル) 全体 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ を考へルト, 明 = $\widetilde{\mathfrak{g}}$ は *locally compact* = ナルカラ Lie 群デアル。 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の Lie ring $\widehat{\mathfrak{I}}$ トスレバ $\widehat{\mathfrak{I}} \cong \overline{\mathfrak{I}}$ デアル。然シ $\widehat{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$ = ナルカドウカハワカラナイ。實際 $\widehat{\mathfrak{I}}$ が $\overline{\mathfrak{I}}$ よりモ大キクナル example トシテ

$$\overline{\mathfrak{I}}, \text{ base} = \left\| \begin{array}{cc} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \tau\sqrt{-1} \end{array} \right\|, \tau \text{ irrational}$$

が掲ゲラレル。故 =

Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}$ は Lie 群 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の単位要素 E の近傍 = ハナラナイ。

ヨツテ $\overline{\mathfrak{I}} = \widehat{\mathfrak{I}}$ トナルタメノ条件ヲ求メルコトが問題 = ナル。上 = 見タ如ク, *classical* + Lie の理論ガハ之レ = 答ヘテ ハラナイノデアアル。本談話 = 於テハ 次ノ定理ヲ述ベタイ。

定理. $\overline{\mathfrak{I}}$ が irreducible ナラバ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}$ は Lie 群 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の単位, 近傍 = ナル。

コゝ = $\overline{\mathfrak{I}}$ が irreducible ト云フ, ハ $\overline{\mathfrak{I}}$ の要素ガ 全テ同時 = ハ

$$\left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ * & B \end{array} \right\|$$

ノ形 = ハ *transform* デキナイコトヲ云フノデアアル。以下 其ノ証明。

Lemma 1. $\overline{\mathfrak{g}}$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の Lie 不変部分群芽デアル。即チ任意ノ $B \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ = 對シテ $A \in \overline{\mathfrak{g}}$ が充分 E = 近ケレバ

$$BAB^{-1} \in \overline{\mathfrak{g}}$$

証明. $A = \exp(X)$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ トスレバ
 $BAB^{-1} = \exp(BXB^{-1})$ ナリ X ト共 $= BXB^{-1}$ ハ 0 = 收
 斂スルカラ

$$X \text{ ト共 } = BXB^{-1} \in \overline{\mathfrak{J}}$$

が証明サレレバヨイ。所が之レハ $B \in \overline{\mathfrak{g}}$ ノトキハ明カデア
 ル。何者、コノトキハ変換 $X \rightarrow BXB^{-1}$ ハ $\overline{\mathfrak{g}}$, linear
 adjoint Lie 群ヲ *induzieren* サレルカラ。 $B \in \widehat{\mathfrak{g}}$
 ナル一般ノ場合ハコノ *special case* カ $\rightarrow$ *limit process*
 = ヨツテ得ラレル。

Lemma 2. (E. Cartan / 定理 — 例ヘバ H. Freudenthal, Ann. of Math. 37, 1936, p. 64 — 7 見ラレ
 タシ)。 $\widehat{\mathfrak{g}}$ ハ irreducible ナ Lie 群デアアルカ $\widehat{\mathfrak{g}}$ ノ單
 位ノ近傍ハ semi-simple ナ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}_1$, 可換ナ Lie 群芽
 $\overline{\mathfrak{g}}_2$ トノ直積 = ナル。コノ $\overline{\mathfrak{g}}_1$ ノ行列ハ全テ determinant
 1 ナ $\overline{\mathfrak{g}}_2$ ノ行列ハ全テ αE (α 複素数) ノ形デアアル。

Lemma 2'. $\overline{\mathfrak{J}}$ が irreducible ナル / ミナラズ
 $\text{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ ナラバ $\widehat{\mathfrak{g}}$ ハ semi-simple ナ
 Lie 群デアアル。

証明. コノトキ $\overline{\mathfrak{g}}$ 従ツテ $\widehat{\mathfrak{g}}$ ノ行列ハ全テ deter-
 minant 1 = ナル (良ク知ラレタ公式 $\det(\exp(X)) = \exp$
 $(\text{trace}(X)) = 1$) ,

上ノ條件 $\text{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\overline{\mathfrak{J}}$ が semi-simple
 ナ ring ナラ確 = 満足サレル。何者、semi-simple ナ

Lie ring $\mathcal{I}$ は、commutator ring と一致スル。即ち $\mathcal{I}$ の任意の element は $[X, Y]$, X 及び $Y \in \mathcal{I}$, の形 = 表ハサレルカラ (例へば H. Freudenthal, 前出参照)。

定理ノ証明. Lemma 1 = $\exists$ レバ $\mathcal{I}$ は $\widehat{\mathcal{I}}$ の ideal デアル。即ち $X \in \mathcal{I}$, $Y \in \widehat{\mathcal{I}}$ たらバ $[X, Y] \in \mathcal{I}$. 先ツ $\mathcal{I}$ は $\widehat{\mathcal{I}}$ の direct summand ナルコトヲ示サウ。

Lemma 2 = $\exists$ レバ Lie ring $\mathcal{I}$ は semi-simple + Lie ring $\mathcal{I}_1$ (of the Lie group germ $\mathcal{O}_{\mathcal{I}_1}$) と可換 + Lie ring $\mathcal{I}_2$ (of the Lie group germ $\mathcal{O}_{\mathcal{I}_2}$) とノ直和 = ナル。 $\mathcal{I}_1$ は semi-simple 故カラ Cartan ノ基本定理 = ヨリ, simple 且ツ semi-simple + ideal ノ直和 = ナル。又 $\mathcal{I}_2$ ノ基ハ

i) $a \in E$, a ハ 複素数 ($= 0$, 若シ $\mathcal{I}_2 = 0$ たらバ)

又ハ

ii) E 及び $\sqrt{-1}E$

ヨリ成ル。ヨツテ $\widehat{\mathcal{I}}$ ハ 單純 ideal ノ直和 = ナル, 従ツテ ideal $\mathcal{I}$ は $\widehat{\mathcal{I}}$ の direct summand デアル。

次 $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}_1$ ヲ示サウ。若シ然ラズトスレバ $\mathcal{I}$ は $\widehat{\mathcal{I}}$ の ideal 故カラ $\mathcal{I}_1 \cong \mathcal{I}_1'$ + semi-simple + ideal $\mathcal{I}_1'$ が存在シタケレバナラナイ。 $\widehat{\mathcal{I}}$ ハ 單純 ideal ノ直和 故カラ $\mathcal{I}_1'$ は $\widehat{\mathcal{I}}$ と commutative デナケレバナラナイ。

(*) $[X, Y] = 0$, $X \in \mathcal{I}$, $Y \in \mathcal{I}_1'$.

故ニ $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}$ が irreducible + group germ 故カラ, Schur

ノ Lemma = ヨリ, $\overline{J}'$ ノ行列ハ全テ αE ノ形デナケレバ
ナラナイ。ヨツテ $\overline{J}'$ ハ semi-simple デアリ得ナイ。之
ハ矛盾デアルカラ $\overline{J} \cong \overline{J}'$ デナケレバナラナイ。

上ノ証明ノ仕方カラ $\overline{J}$ ガ irreducible 且ツ semi-
simple ナンバ $\overline{J} = \widehat{J}$ デアル。何トナレ、 Lemma 2' = ヨ
リ $\widehat{J}$ ハ semi-simple デカラ。ヨツテ上ノ Lemma 2
= 於ケル $\overline{\mathfrak{g}}_1$ 及ビ $\overline{\mathfrak{g}}_2$ ハ Lie 群芽ナルノミナラズ Lie 群デ
アル。

次 = $\overline{J} \cong \overline{J}_2$ ガ云ヘレバ定理ノ証明ハ済ンダコトナ
ル。

コノ處メ = ニツノ case = 分ケル。

Case 1. $\overline{J}_2$ ノ base = αE ($\overline{J}_2 = 0$, トキハ $\alpha = 0$)。
 $\overline{J}_2 \neq 0$ 且ツ $\overline{J} = \overline{J}_1$ トセヨ。然ラバ, Lemma 2' = ヨリ,
群芽 $\overline{\mathfrak{g}}$ ハ Lie 群 $\overline{\mathfrak{g}}_1$ ノ單位ノ近傍 = ナル。之レハ $\overline{J}_2 = 0$
ヲ示スカラ不合理デアル。ヨツテ $\overline{J} \cong \overline{J}_2$ 。

Case 2. $\overline{J}_2$ ノ base = E 及ビ $\sqrt{-1} E$ 。 $E \in \sqrt{-1} E \in$
 $\overline{J}$ = 属サズトスレバ上ノ如クシテ $\overline{J}_2 = 0$ 。次 = E 又ハ $\sqrt{-1} E$
ノ何レカ一方ノミガ $\overline{J}$ = 属スルトセヨ。之レヲ E トスル。
然ラバ E ハ全テノ行列ト可換デカラ定義 = ヨリ, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ ノ任意
ノ行列ハ

$$A_1, A_2, \dots, A_k \in \begin{cases} A_i \in (\overline{\mathfrak{g}} \cap \overline{\mathfrak{g}}_1 \cap \dots \cap \overline{\mathfrak{g}}_k) \\ Y = \exp(tE), t \text{ real} \end{cases}$$

ノ形又ハ斯ル形ノ行列ノ極限デアル。ヨツテ $X \in \widetilde{\mathfrak{g}} =$ 對シ
テ $\det(X) = \exp(t)$, $t \text{ real}$, デアル。故 = $\sqrt{-1} E$ ハ

$\widehat{\mathcal{I}}$ = 属シ得ナイ。之レハ不合理歟カラ $\overline{\mathcal{I}} \cong \overline{\mathcal{I}}_2$ デナケレバ
ナラナイ。

故ニ $\overline{\mathcal{I}} = \widehat{\mathcal{I}}$ デナケレバナラナイ。 — 以テ —