OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Lieノ第二基本定理ニ関聯シターツノ問題
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 128, p. 179-185
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74496
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

571. Lie ノ第二基本定理ニ関聯シタ一ツノ問題

吉田　耕作（阪大）

複素数体ノ上ノ n 次ノ行列 $A=\|a_{ij}\|$ ノ作ル ring ヲ R トスル。

絶対値 $|A|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ニヨッテ R = topology ガ導入サレル。R ノ部分集合 $\mathfrak{G}$ ガ matrix 乗法ニ対シテ群ヲ作ルトキ，$\mathfrak{G}$ ハ上ノ topology ニヨッテ topological group ニナル。$\mathfrak{G}$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキニ Lie 群ト呼ブコトニスル。

1) 實数ヲ係数トシテ一次独立ナ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m (\in R)$ ガ存在シ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) \in \mathfrak{G}, \quad t \text{ real}$$

2) 充分小サナ正数 ε ヲトレバ，$|A-E|\leqq\varepsilon$．（E ハ R ノ単位行列），$A\in\mathfrak{G}$ ナル A ハ uniquely ニ

$$A=\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right), \quad t \text{ real}.$$

ト表ハサレル。

但シ $\exp(X)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{X^i}{i!}$

然ラバ $\mathfrak{G}$ ガ Lie 群ナルタメノ必充條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ locally

compact ナコトデアル。（本紙談話　　参照，但シ discrete group ヲモ Lie 群ト呼ブコトニスル）

$\mathfrak{o}_f$ ガ Lie 群ナラバ，$\sum_{i=1}^{m} t_i X_i$，t real，ナル形ノ element 全体ハ次ノ條件ヲ満足スル。

(α) ハ real linear space デ有限ナ base（with real coefficients）ヲ有スル。即チ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$。

(β) $[X,Y]=XY-YX$ ハ X, Y ト共ニ ハ ニ属スル。

此ノ ヲ Lie 群 $\mathfrak{o}_f$ ノ Lie ring ト呼ブ。ニツノ ring operations ハ vector-addition ト commutator-multiplication $[X,Y]$ デアル。 ハ $\lim_{i\to\infty}((A_i-E)/\varepsilon_i)$（$A_i \in \mathfrak{o}_f$，$\varepsilon_i$ real 且ツ $A_i \neq E$，$\varepsilon_i \neq 0$，$\lim_{i\to\infty} A_i = E$，$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$）ニ依ツテ定義サルル如キ $\mathfrak{o}_f$ ノ E ニ於ケル微分商ノ集合デアル（本紙談話　　）。

今迄ニ (α) 及ビ (β) ヲ満足スル R ノ subset $\mathfrak{J}$ ガ apriori ニ與ヘラレタトキ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) \quad \left(t \text{ real 且} \sum_{i=1}^{m} |t_i| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\right)$$

ナル形ノ R ノ element 全体ノ集合ヲ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ トスレバ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ハ所謂 Lie 群デアル。即チ $X, Y \in \overline{\mathfrak{o}_f}$ ガ充分 E ニ近ケレバ X^{-1} 及ビ $XY \in \overline{\mathfrak{o}_f}$。

之レガ Lie ノ第二基本定理デアル。ソコデ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ノ要素有限個ノ積及ビ斯ル積ノ limes（但シ non-singular

ナモノトミル）全体 $\widetilde{\mathfrak{o}_f}$ ヲ考ヘルト，時= $\widetilde{\mathfrak{o}_f}$ ハ locally compact =ナルカラ Lie 群デアル。$\widetilde{\mathfrak{o}_f}$ ノ Lie ring ヲ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ トスレバ $\widetilde{\mathfrak{I}} \supseteq \overline{\mathfrak{I}}$ デアル。然シ $\widetilde{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$ =ナルカドウカハワカラナイ。実際 $\widetilde{\mathfrak{I}}$ が $\overline{\mathfrak{I}}$ ヨリモ大キクナル example トシテ

$$\overline{\mathfrak{I}} \text{ の base} = \left\| \begin{matrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \tau\sqrt{-1} \end{matrix} \right|, \quad \tau \text{ irrational}$$

ガ掲ゲラレル。故=

<u>Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ハ Lie 群 $\widetilde{\mathfrak{o}_f}$ ノ単位要素 E ノ近傍=ハナラナイ。</u>

ヨッテ $\overline{\mathfrak{I}} = \widetilde{\mathfrak{I}}$ トナルタメノ條件ヲ求メルコトガ問題=ナル。上=見タ如ク，classical ナ Lie ノ理論ガハ之レ=答ヘテハヲラナイノデアル。本談話=於テハ次ノ定理ヲ述ベタイ。

定理. <u>$\overline{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ナラバ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ハ Lie 群 $\widetilde{\mathfrak{o}_f}$ ノ単位ノ近傍=ナル。</u>

コヽ= $\overline{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ト云フノハ $\overline{\mathfrak{I}}$ ノ要素ガ全テ同時=ハ

$$\left\| \begin{matrix} A & 0 \\ * & B \end{matrix} \right\|$$

ノ形=ハ transform デキナイコトヲ云フノデアル。以下其ノ証明。

Lemma 1. $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{o}_f}$ ノ Lie 不変部分群芽デアル。即チ任意ノ $B \in \widetilde{\mathfrak{o}_f}$ =對シテ $A \in \overline{\mathfrak{o}_f}$ ガ充分E=近ケレバ

$$BAB^{-1} \in \overline{\mathfrak{G}}$$

証明. $A = \exp(X)$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ トスレバ $BAB^{-1} = \exp(BXB^{-1})$ デアリ X ト共ニ BXB^{-1} ハ0ニ収斂スルカラ

$$X\text{ト共ニ}\ BXB^{-1} \in \overline{\mathfrak{J}}$$

ガ証明サレレバヨイ。所ガ之レハ $B \in \overline{\mathfrak{G}}$ ノトキハ明カデアル。何者，コノトキハ変換 $X \to BXB^{-1}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ linear adjoint Lie 群芽デ induzieren サレルカラ。$B \in \widetilde{\mathfrak{G}}$ ナルー般ノ場合ハコノ special case カラ limit process ニヨッテ得ラレル。

Lemma 2. (E. Cartan ノ定理——例ヘバ H. Freudenthal, Ann. of Math. 37, 1936, p. 64 ヲ見ラレタシ)。$\widetilde{\mathfrak{G}}$ ハ irreducible ナ Lie群デアルカ $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ単位ノ近傍ハ semi-simple ナ Lie群芽 $\overline{\mathfrak{G}_1}$ ト可換ナ Lie 群素 $\overline{\mathfrak{G}_2}$ トノ直積ニナル。コゝニ $\overline{\mathfrak{G}_1}$ ノ行列ハ全テ determinant 1 又 $\overline{\mathfrak{G}_2}$ ノ行列ハ全テ αE (α 複素数) ノ形デアル。

Lemma 2'. $\overline{\mathfrak{J}}$ ガ irreducible ナルノミナラズ $\mathrm{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ ナラベ $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ハ semi-simple ナ Lie群デアル。

証明. コノトキ $\overline{\mathfrak{G}}$ 従ッテ $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ行列ハ全テ determinant 1 ニナル(良ク知ラレタ公式 $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{trace}(X))$ ニヨレ)。

上ノ條件 $\mathrm{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\overline{\mathfrak{J}}$ ガ semi-simple ナ ring ナラ確ニ満足サレル。何者、semi-simple ナ

Lie ring $\overline{\mathfrak{I}}$ ハソノ commutatorring ト一致スル。即チ $\overline{\mathfrak{I}}$ ノ任意ノ element ハ $[X,Y]$, X 及ビ $Y \in \overline{\mathfrak{I}}$, ノ形ニ表ハサレル カラ（例ヘバ H. Freudenthal, 前出参照）。

定理ノ証明. Lemma 1 ニヨレバ $\overline{\mathfrak{I}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ ideal デアル。即チ $X \in \overline{\mathfrak{I}}$, $Y \in \widetilde{\mathfrak{I}}$ ナラベ $[X,Y] \in \overline{\mathfrak{I}}$. 先ヅ $\overline{\mathfrak{I}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ direct summand ナルコトヲ示サウ。

Lemma 2 ニヨレバ Lie ring $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ハ semi-simple ナ Lie ring $\overline{\mathfrak{I}}_1$ (of the Lie group germ $\overline{\mathfrak{G}}_1$) ト可換ナ Lie ring $\overline{\mathfrak{I}}_2$ (of the Lie group germ $\overline{\mathfrak{G}}_2$) トノ直和ニナル。$\overline{\mathfrak{I}}_1$ ハ semi-simple ダカラ Cartan ノ基本定理ニヨリ, simple 且ツ semi-simple ナ ideal ノ直和ニナル。又 $\overline{\mathfrak{I}}_2$ ノ基ハ

i) aE, a ハ複素数 ($=0$, 若シ $\overline{\mathfrak{I}}_2 = 0$ ナラバ)

又ハ

ii) E 及ビ $\sqrt{-1}E$

ヨリ成ル。ヨッテ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ハ単純 ideal ノ直和ニナル, 従ッテ ideal $\overline{\mathfrak{I}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{I}}$, direct summand デアル。

次ニ $\overline{\mathfrak{I}} \supseteq \overline{\mathfrak{I}}_1$ ヲ示サウ。若シ然ラズトスレバ $\overline{\mathfrak{I}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ ideal ダカラ $\overline{\mathfrak{I}}_1 \supseteq \overline{\mathfrak{I}}_1'$ ナル semi-simple + ideal $\overline{\mathfrak{I}}_1'$ ガ存在シナケレバナラナイ。$\widetilde{\mathfrak{I}}$ ハ単純 ideal ノ直和ダカラ $\overline{\mathfrak{I}}_1'$ ハ $\overline{\mathfrak{I}}$ ト commutative デナケレバナラナイ.

(*) $[X,Y]=0$, $X \in \overline{\mathfrak{I}}$, $Y \in \overline{\mathfrak{I}}_1'$.

故ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ irreducible + group germ ダカラ, Schur

ノ Lemma = ヨリ，$\overline{\mathfrak{J}_1'}$ ノ行列ハ全テ αE ノ形デナケレバナラナイ。ヨッテ $\overline{\mathfrak{J}_1'}$ ハ semi-simple デアリ得ナイ。之ハ矛盾デアルカラ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteq \overline{\mathfrak{J}_1}$ デナケレバナラナイ。

上ノ証明ノ仕方カラ $\overline{\mathfrak{J}}$ が irreducible 且ツ semi-simple ナンバ $\overline{\mathfrak{J}} = \widehat{\mathfrak{J}}$ デアル。何トナレバ Lemma 2' = ヨリ $\widehat{\mathfrak{J}}$ ハ semi-simple ダカラ。ヨッテ上ノ Lemma 2 = 於ケル $\overline{\mathfrak{o}_1}$ 及ビ $\overline{\mathfrak{o}_2}$ ハ Lie 群芽ナルノミナラズ Lie 群デアル。

次ニ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteq \overline{\mathfrak{J}_2}$ が云ヘレバ定理ノ証明ハ済ンダコトニナル。

コノ為メニ二ツノ case ニ分ケル。

Case 1. $\overline{\mathfrak{J}_2}$ ノ base $= aE$ ($\overline{\mathfrak{J}_2} = 0$ ノトキハ $a=0$)。$\overline{\mathfrak{J}_2} \neq 0$ 且ツ $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{J}_1}$ トセヨ。然ラベ，Lemma 2' = ヨリ，群芽 $\overline{\mathfrak{o}}$ ハ Lie 群 $\overline{\mathfrak{o}_1}$ ノ単位ノ近傍ニナル。之レハ $\overline{\mathfrak{J}_2} = 0$ ヲ示スカラ不合理デアル。ヨッテ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteq \overline{\mathfrak{J}_2}$。

Case 2. $\overline{\mathfrak{J}_2}$ ノ base $= E$ 及ビ $\sqrt{-1}E$. E モ $\sqrt{-1}E$ モ $\overline{\mathfrak{J}}$ ニ属サズトスレバ上ノ如クシテ $\overline{\mathfrak{J}_2} = 0$。次ニ E 又ハ $\sqrt{-1}E$ ノ何レカ一方ノミガ $\overline{\mathfrak{J}}$ ニ属スルトセヨ。之レヲ E トスル。然ラバ E ハ全テノ行列ト可換ダカラ定義ニヨリ，$\widetilde{\mathfrak{o}}$ ノ任意ノ行列ハ

$$A_1 A_2 \cdots\cdots A_k Y \begin{cases} A_i \in (\overline{\mathfrak{o}} \text{ト } \overline{\mathfrak{o}_1} \text{トノ共通集合}) \\ Y = \exp(tE),\ t \text{ real} \end{cases}$$

ノ形又ハ斯ル形ノ行列ノ極限デアル。ヨッテ $X \in \widetilde{\mathfrak{o}}$ ニ対シテ $\det(X) = \exp(t)$，t real，デアル。故ニ $\sqrt{-1}E$ ハ

$\widehat{\vartheta}$ ＝属シ得ナイ。之レハ不合理ダカラ $\overline{\vartheta} \supseteq \overline{\vartheta_2}$ デナケレバ
ナラナイ。

故＝ $\overline{\vartheta} = \widehat{\vartheta}$ デナケレバナラナイ。　　——以上——