



Title	線状函數方程式ニ就イテ（Ⅳ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 128, p. 185-190
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74497
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

572. 線状函数方程式 = 就イテ (IV)

北川 敏 男 (阪大)

1. (I) - (III) = 於イテ、若干ノ *spectral properties* ヲ具ヘタ基本作用素 $\mathcal{O}$ が興ヘラレテキルトシ、コレト或ル意味デ可換ナル作用素 Γ = 関シ函数方程式

$$(1) \quad \Gamma f(x) = 0 \quad (x \in X)$$

ヲ考ヘテ來タ。 $\mathcal{O}$ 及ビ Γ = 色々ナ條件ヲ附加スルコト = ヨリ、線状移動可能函数方程式即チ $\mathcal{O}$ が微分演算デアリ從ツテ Γ ハ *linear translatable operator* デアルトコロノ (1) ノ特別ノ場合 = 於イテ ヨク知ラレタ基本定理ノ拡張が得ラレルコトガ分ツタ⁽¹⁾。ソノ間、類似ハ顯著デアアル。ソコデ、何故コウシタ *parallelism* が成立スルカトイフソノ根據ヲ知リタイ。

(1) 勿論吾々ハ何時マデモ *parallelism* = 満足スベキデハナイ。シカシ、第一段階トシテソレヲナサネバナラナイデアラウ。

次 = 問題ノ Formulation カラ明ラカデアルヤウニ、作用素ノ可換環ト密接ナ関係ガアル。⁽²⁾ ソコデ今マデ知ラレテイルソレノ理論ト如何ナル関聯ニアルカゴ問題ニナル。ソレヲニ就テ少シ述ベテ見タイ。

2. Volterra-PérèsノComposition⁽³⁾

$$(2) \quad \overset{**}{F} \overset{**}{G} = \int_x^y \overset{**}{F}(x, t) \overset{**}{G}(t, y) dt$$

= 於テ今決ヘラレタ一定ノ $\overset{**}{F}(x, y)$ ガ $0 \leq x \leq y \leq a$ デ定義サレテ “*forme canonique*” デアルトスル。⁽⁴⁾ $\overset{**}{G}(x, y)$ ⁽⁵⁾ ガコノ $\overset{**}{F}(x, y)$ ト可換デアルトスル。即チ $\overset{**}{F} \overset{**}{G} = \overset{**}{G} \overset{**}{F}$ ナリトスルト

$$(3) \quad \overset{**}{G}(x, y) = \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi$$

(2) Γ_1, Γ_2 カ夫々少ト可換ナルトキ、ソレヲ同志バ又可換ナルコトニハ勿論イロイロノ條件ヲ要スル。最初カラ考ヘラサレ函数集合 (A), (B), (C) = 依存シテノ話ニナルカラソレハ相當ニムツカシイデアロウト思ハレル。

(3) Volterra-Pérès, *Leçons sur la composition et les fonction permutables*. コレヲ以下 [C] デ示ス。

(4) [C] p. 37 ヲミラレヨ。 $\frac{\partial^2 \overset{**}{F}}{\partial x \partial y}$ カ存在シテ連続且ツ

$$\overset{**}{F}(x, x) = 1, \quad \left(\frac{\partial \overset{**}{F}}{\partial x} \right)_{y=x} = \left(\frac{\partial \overset{**}{F}}{\partial y} \right)_{y=x} = 0$$

トナツテキルコトデアル。

(5) $\overset{**}{G}(x, y)$ ハ (x, y) ニ関シテ連続。 ([C] p. 39)

ナル関係ヲミタス $\lambda(\xi)$, 重が存在スル。コゝニ重ハ F カラ決定サレル。

$\lambda(\xi)$ ハ $Q(x, y) = 0$ ニ *depend* スル。(3)ヲ $\mathcal{N}(\lambda)$ ナ表ハス。⁽⁶⁾ 又任意ノ連続函数 $\lambda(\xi) = 0$ 對シテ (3)ハ F ト *permutable* ナ作用素ヲアタヘル。⁽⁷⁾ コゝニ

(i) 変換 $\mathcal{N}$ ハ *composition* ヲ *conserve* スル。

$$(4) \quad \mathcal{N}^*(\lambda) \mathcal{N}^*(\mu) = \mathcal{N}^*(\lambda \mu)$$

デアル。コノコトカラ次ノ事ヲシル。

(ii) $F(x, y)$ ト *permutable* ナ $G_1(x, y), G_2(x, y)$ ハ相互ニ *permutable* デアル。從ツテ可換環ヲツクル。⁽⁸⁾

今、コノ可換環ニツイテ、(I) — (III) ノ *Formulation* ヲ當テハメテ見ル。コレガコノ談話ノ目的デアル。

3. $1^{*n} = \frac{(y-x)^n}{n!}$ デアル。コレヲ、 x ヲ始点、 y ヲ変

數トシテ考ヘルトキ $\left\{ \frac{(y-x)^n}{n!} \right\}$ ハ次ノ性質ヲモツ：

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{(y-x)^n}{n!} \right\} = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

コノ性質ニ着眼シテ $\left\{ F^{*n+1}(x, y) \right\}$ ナル函数系列ニ於テコレ

(6) [C] p. 42 及び p. 56.

(7) 式 (3)ヲ *Pérès* ノ変換トイフ。[C] p. 65.

(8) $G(x, y)$ ハ $(x, y) = 0$ ニ關シテ連続トシタ。 $F(x, y)$ ト可換ナルカナル G ノ全体ハ可換環デアル。然ルニ、色々ナ問題ヲ解ク必要上、 $G(x, y)$ ヲ $(x, y) = 0$ ニ關シテ連続トスルノ、族スギル。ソコデコノ環ノ拡張 (*Topological* ナ) ガ重要ナ問題デアル。

ヲ x ヲ 始 点, y ヲ 変 数 ト シ タ ト キ

$$(5) \quad \mathcal{D}_y \left[F^{*n+1}(x, y) \right] = F^{*n}(x, y)$$

ト ナ ル ヲ $\mathcal{D}$ ナ *linear operation* ヲ 求 メ テ ミ ル。 $\mathcal{D}_y$ 次 ノ 如 ク 定 義 ス ル。

定 義 1. $G(x, y)$ ヲ $F(x, y)$ ト 可 換 ナ リ ト ス ル。

(3) = ヲ ツ テ $G(x, y) =$ 對 應 ス ル λ が 微 分 可 能 デ ア ル ト ス ル。

然 ル ト キ $\mathcal{D}_y \{ G(x, y) \}$ ハ 存 在 シ, 次 ノ 式 ヲ 與 ヘ ラ レ ル:

$$(6) \quad \mathcal{D}_y \{ G(x, y) \} \equiv \mathcal{D}_y \mathcal{O}(\lambda) \equiv \mathcal{O} \left(\frac{d\lambda}{d\xi} \right)$$

然 ル ト キ 次 ノ 事 柄 ハ 容 易 = 得 ラ レ ル:

定 理 1. 任 意 ノ x, y ($0 \leq x \leq y \leq a$) = 對 シ テ

$$(7) \quad \mathcal{D}_y \left\{ F^{*n+1}(x, y) \right\} = F^{*n}(x, y) \quad (9) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

定 理 2. 級 數

$$(8) \quad f_\lambda(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^{*n+1}(x, y)$$

= ヲ ツ テ 定 義 サ レ ル 函 數 ハ タ シ カ = 存 在 シ, λ ノ 整 函 數 デ ア

(9) 証 明 容 易。

$$(10) \quad \left| F^{*n+1}(x, y) \right| \leq \frac{|y-x|^n}{n!} \left\{ 1 + \frac{M \theta |y-x|}{n} \right\} \quad \text{ナ ル 関 係 式} \quad \text{が 幅} \quad \text{ヲ}$$

利 カ ス。 コ レ ハ [C] p. 67 = 與 ヘ ラ レ テ キ ル。 尚 (7) 及 ビ コ

ノ 評 価 カ ラ, $\{ F^{*n+1}(x, y) \}$ ハ 点 $x = \text{adjoint}$ シ タ y ノ 函

數 ト ミ ル ト キ, 吾 々 が (III) = 於 テ 述 ベ タ ト コ ロ ノ Sheffer ノ

函 數 系 ト ミ ラ レ ル コ ト ヲ 注 意 ス ル。

リ、任意ノ $\lambda = \text{ツイテ}$

$$(9) \quad d_y \{ j_\lambda(x, y) \} = \lambda j_\lambda(x, y)$$

次ニ各 t ($0 \leq t \leq a$)ニ對シテコレヲ座トシテノ三ツノ
函数集合 (A_F^t) , (B_F^t) 及ビ (C_F^t) ヲ定義スル:

定義2. $\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ (A_F^t) \text{ハ考フル可換環全体。} \\ 2^\circ (B_F^t) \text{ハ} (A_F^t) \text{ニ屬シ} d_y \{ G(x, y) \} \text{ガ(定} \\ (10) \left\{ \begin{array}{l} \text{義} \end{array} \right. \text{ノ} \\ 3^\circ (C_F^t) \text{ハ} (B_F^t) \text{ニ屬シ、考ヘル点} x \text{ニテ} \\ G(x, x) = 0 \text{トナツテナル} G(x, y) \text{ノ} \\ \text{全体。} \end{array} \right.$

(3)ニヨリ $\lambda(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq a$)ト $G(x, y)$ ($0 \leq x \leq y \leq a$)トガ一對ニ對應シテナルコトニ注意スル。

定理3. 線狀作用素 d_y ハ (A_F^t) , (B_F^t) , (C_F^t) ニ於テ、
次ノ如ク spectral propertiesニ關シテニツノ單一性
ヲ有スル:

[I] $G(x, y) \in (B_F^t)$ ニシテ且ツ $d_y \{ G(x, y) \} = \lambda G(x, y)$ ヲ満足スルモノハ $h j_\lambda(x, y)$ ($h = \text{常數}$)ニ限ル。

[II] $G(x, y) \in (A_F^t)$ ニ任意ニ與ヘルトキ

$$(11) \quad d_y \{ H(x, y) \} = \lambda H(x, y) + G(x, y)$$

ヲ満足スル $H(x, y) \in (C_F^t)$ ニ於イテ一ツ而シテ唯一ツ
存在スル。

ソコデ

定義3. (11)ニ於ケル $H(x, y)$ ヲバ $L_{\lambda t}[G(x, y)]$ トテ

表ハス。

以上ニヨリ、*Volterra-Pérès*ノ可換環ノ理論ヲ
(I) — (III)ノ方式ニ入レルコトハ出来タト思フ。

4. 以上考ヘスハ、所謂 *order 1*ノ核 $F(x, y)$ ニ就
イテデアル、一般ノ場合即チ *order* $n (> 1)$ ノトキニハ、
以上ノヤウナ事柄ガソウ容易ニハ行カナイヤデアル。