OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	線状函數方程式ニ就イテ（IV）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 128, p. 185-190
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74497
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

572. 線狀函數方程式ニ就イテ(IV)

北川 敏男(阪大)

1. (I)－(III)ニ於イテ、若干ノ spectral properties ヲ具ヘタ基本作用素 $\mathcal{A}$ ガ與ヘラレテヰルトシ、コレト或ル意味デ可換ナル作用素 Γ ニ關シ函數方程式

(1) $\Gamma f(x) = 0 \qquad (x \in X)$

ヲ考ヘテ來タ。$\mathcal{A}$ 及ビ Γ ニ色々ナ條件ヲ附加スルコトニヨリ、線狀移動可能函數方程式即チ $\mathcal{A}$ ガ微分演算デアリ從ッテ Γ ハ linear translatable operator デアルトコロノ (1) ノ特別ノ場合ニ於イテヨク知ラレタ基本定理ノ拡張ガ得ラレルコトガ分ッタ[1]。ソノ間ノ類似ハ顯著デアル。ソコデ、何故コウシタ parallelism ガ成立スルカトイフソノ根據ヲ知リタイ。

---

1) 勿論吾々ハ何時マデモ parallelism ニ滿足スベキデハナイ。シカシ、第一段階トシテソレヲナサネバナラナイデアラウ。

次＝問題ノ Formulation カラ明ラカデアルヤウニ，作用素ノ可換環ト密接ナ関係ガアル。[2] ソコデ今マデ知ラレテヰルソレノ理論ト如何ナル関聯ニアルカガ問題ニナル。ソレラニ就テ少シ述ベテ見タイ。

2. Volterra-Pérès ノ Composition[3]

(2) $$\overset{\times}{F}\overset{\times}{G}=\int_x^y F(x,t)\,G(t,y)\,dt$$

ニ於テ今夾ヘラレタ一定ノ $F(x,y)$ ガ $0\leqq x\leqq y\leqq\alpha$ デ定義サレテ〝forme cononique〟デアル[4]トスル。$G(x,y)$[5] ガコノ $F(x,y)$ ト可換デアルトスル。即チ $\overset{\times}{F}\overset{\times}{G}=\overset{\times}{G}\overset{\times}{F}$ ナリトスルト

(3) $$G(x,y)=\lambda(y-x)+\int_0^{y-x}\lambda(\xi)\varPhi(\xi;x,y)\,d\xi$$

---

(2) Γ_1, Γ_2 ガ夫々ゞト可換ナルトキ，ソレラ同志デ又可換ナルコトニハ勿論イロイロノ條件ヲ要スル。最初カラ考ヘアヰル函數集合 (A), (B), (C) ニ依存シテノ話ニナルカラソレハ相當ニムツカシイデアロウト思ハレル。

(3) Volterra-Pérès, Leçons sur la composition et les fonction permutables. コレヲ以下 [C] デ示ス。

(4) [C] p.37 ヲミヨ。$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ ガ存在シテ連続且ツ

$$F(x,x)=1,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=x}=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=x}=0$$

トナツテヰルコトデアル。

(5) $G(x,y)$ ハ (x,y) ニ関シテ連続。([C] p.39)

ナル関係ヲミタス入(ξ)，亜が存在スル。コンニ亜ハFカラ決定サレル。

入(ξ)ハ G(x, y) ノミ depend スル。(3)ヲ $\mathcal{L}(\lambda)$ デ表ハス。(6) 又任意ノ連続函数入(ξ)ニ對シテ(3)ハFト permutable ナ作用素ヲアタヘル。(7) コンニ

(i) 変換 $\mathcal{L}$ ハ composition ヲ conserve スル。

(4) $\mathcal{L}^{*}(\lambda)\mathcal{L}^{*}(\mu) = \mathcal{L}(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu})$

デアル。コノコトカラ次ノ事ヲシル。

(ii) F(x, y) ト permutable ナ $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$ ハ相互ニ permutable デアル。從ッテ可換環ヲツクル。(8)

今、コノ可換環ニツイテ、(I)—(III)ノ Formulation ヲ皆テハメテ見ル。コレガコノ談話ノ目的デアル。

3. $1^{*n} = \dfrac{(y-x)^n}{n!}$ デアル。コレヲ、xヲ始点，yヲ変数トシテ考ヘルトキ $\left\{\dfrac{(y-x)^n}{n!}\right\}$ ハ次ノ性質ヲモツ：

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{(y-x)^n}{n!}\right\} = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

コノ性質ニ着眼シテ $\left\{\overset{*}{F}^{n+1}(x, y)\right\}$ ナル函数系列ニ於テコレ

---

(6) [C] p. 42 及ビ p. 56。

(7) 式(3)ヲ Pérès ノ変換トイフ。[C] p. 65.

(8) G(x, y) ハ (x, y) ニ関シテ連続トシタ。F(x, y) ト可換ナルカンル G ノ全体ハ可換環デアル。然ルニ、色々ナ問題ヲ解ク必要上，G(x, y) ヲ (x, y) ニ関シテ連続トスルト、狭スギル。ソコデコノ環ノ拡張(Topological ナ)ガ重要ナ問題デアル。

ヲ x ヲ始点，y ヲ変数トシタトキ

$$(5)\qquad \mathcal{D}_y\left[\overset{*}{F}{}^{n+1}(x,y)\right]=\overset{*}{F}{}^{n}(x,y)$$

トナルヤウナ linear operation ヲ求メテミル。$\mathcal{D}_y$ ヲ次ノ如ク定義スル。

定義1. $G(x,y)$ ヲ $F(x,y)$ ト可換ナリトスル。(3) ニヨツテ $G(x,y)$ ニ對應スル λ ガ微分可能デアルトスル。然ルトキ $\mathcal{D}_y\{G(x,y)\}$ ハ存在シ，次ノ式デ與ヘラレル：

$$(6)\qquad \mathcal{D}_y\{G(x,y)\}\equiv\mathcal{D}_y\,\Omega(\lambda)\equiv\Omega\left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)$$

然ルトキ次ノ事柄ハ容易ニ得ラレル：

定理1. 任意ノ x,y $(0\leqq x\leqq y\leqq a)$ ニ對シテ

$$(7)\qquad \mathcal{D}_y\left\{\overset{*}{F}{}^{n+1}(x,y)\right\}=\overset{*}{F}{}^{n}(x,y)^{(9)}\qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

定理2. 級數

$$(8)\qquad j_\lambda(x,y)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\overset{*}{F}{}^{n+1}(x,y)$$

ニヨツテ定義サレル函數ハタシカニ存在シ[10]，λ ノ整函數デア

---

(9) 証明容易。

(10) $\left|\overset{*}{F}{}^{n+1}(x,y)\right|\leqq\dfrac{|y-x|^n}{n!}\left\{1+\dfrac{M\theta|y-x|}{n}\right\}$ ナル関係式ガ幅ヲ利カス。コレハ〔C〕p.67 ニ與ヘラレテヰル。尚 (7) 及ビコノ評価カラ、$\left\{\overset{*}{F}{}^{n+1}(x,y)\right\}$ ハ点 x ニ adjoint シタ y ノ函数トミルトキ、吾々ガ (III) ニ於テ述ベタトコロノ Sheffer ノ函数系トミラレルコトヲ注意スル。

リ、任意ノ入ニツイテ

(9) $\mathcal{A}_y\{f_\lambda(x,y)\}=\lambda f_\lambda(x,y)$

次ニ各 t ($0\leqq t\leqq\alpha$) ニ對シテコレヲ座トシテノ三ツノ函數集合 (A_F^t), (B_F^t) 及ビ (C_F^t) ヲ定義スル:

定義2.
(10)
1° (A_F^t) ハ考フル可換環全体。
2° (B_F^t) ハ (A_F^t) ニ屬シ $\mathcal{A}_y\{G(x,y)\}$ ガ(定義1ニヨツテ與ヘラレルモノノ全体。
3° (C_F^t) ハ (B_F^t) ニ屬シ、考ヘル点 x ニテ $G(x,x)=0$ トナツテヰル $G(x,y)$ ノ全体。

(3) ニヨリ $\lambda(\xi)$ ($0\leqq\xi\leqq\alpha$) ト $G(x,y)$ ($0\leqq x\leqq y\leqq\alpha$) トガ一對一ニ對應シテヰルコトニ注意スル。

定理3. 線狀作用素 $\mathcal{A}$ ハ (A_F^t), (B_F^t), (C_F^t) ニ於テ、次ノ如ク spectral properties ニ關シテ二ツノ單一性ヲ有スル:

〔I〕 $G(x,y)\in(B_F^t)$ ニシテ且ツ $\mathcal{A}_y\{G(x,y)\}=\lambda G(x,y)$ ヲ滿足スルモノハ $k f_\lambda(x,y)$ (k ニ常數) ニ限ル。

〔II〕 $G(x,y)\in(A_F^t)$ ヲ任意ニ與ヘルトキ

(11) $\mathcal{A}_y\{H(x,y)\}=\lambda H(x,y)+G(x,y)$

ヲ滿足スル。$H(x,y)$ ハ (C_F^t) ニ於イテ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

ソコデ

定義3. (11) ニ於ケル $H(x,y)$ ヲベ $\mathcal{L}_{\lambda t}[G(x,y)]$ デ

表ハス。

以上ニヨリ、Volterra-Péres ノ可換環ノ理論ヲ (I)—(III) ノ方式ニ入レルコトハ出来タト思フ。

4. 以上考ヘタハ，所謂 order 1 ノ核 $F(x,y)$ ニ就イテデアル、一般ノ場合即チ order n (>1) ノトキニハ。以上ノヤウナ事柄ガソウ容易ニハ行カナイヤウデアル。