



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 代數的分岐点ヲ有セザル Riemann面ノ解析的表現                                                  |
| Author(s)    | 早田, 文一                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1937, 129, p. 195-203                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74501">https://doi.org/10.18910/74501</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 576. 代數的分岐点ヲ有セザル *Riemann* 面ノ解析的表現

早 田 文 一

## (I) 解析的數式ヲ作ルコト

*Parabolischer Typus* の *Riemann* 面ダケヲ問題トスル。代數的分岐点ヲ有セザル *Riemann* 面  $F = \infty$  平面ノ有限部ハヲ寫像スル解析函数ヲ  $f(x)$  トスル。  $f(x)$  ハ *mehrfache Stille* ヲ持タナイノデアルカラ、ソレニ由來スル *Anzahlfunktion*  $N_1(r)$  ハ恒等的  $= 0$  デナケレバナラナイ。

$$(1) \quad N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N(r, \frac{1}{f'}) = 0$$

$2N(r, f) - N(r, f')$  ハ 極ニ由來スル項デアルカラ、コレヲ 0 ナラシムル爲メニ先ツ

(I)  $f(x)$  ノ 極ヲ  $a_1, a_2, \dots$  トスレバ、コレ等ハ何レモ  $-\frac{1}{2}$  ノ 極。

トイフ 必要條件ガ出ル。次ニ (1) 式ノ 終リノ 項  $N(r, \frac{1}{f'})$  ヲ 0 ナラシムル爲メニ

(II)  $f'(x)$  ハ 零點ヲ持タス。即チ  $\frac{1}{f'(x)}$  ハ 整函数デナケレバナラヌ。

今

$$\frac{1}{f'(x)} = g(x)$$

ト置ケバ

$$f(x) = \int \frac{dx}{g(x)}$$

積分ノ出発点ハ  $g(x)$  ノ零点以外ノ適當ナ点デイル。 $g(x)$  ハ (I), (II) ノ條件ヨリ  $a_1, a_2, \dots$  = 於イテノミ零点ヲ有シ且ツコレ等ハ何レモ二位ノ零点ガアルコトガワカル。ヨツテ

$$g(x) = \{g_1(x)\}^2$$

ト置ケバ、 $g_1(x)$  ハ整函数ガ  $a_1, a_2, \dots$  = 於テ一位ノ零点ヲ有スル。ヨツテ一先ヅ次ノ結果ニナル。

punktierte Ebene ( $x \neq \infty$ ) ヲ  $f$  平面上ノ代数的余岐点ヲ有セザル Riemann 面 = 一對一 = 等角寫像スル有理型函ハ次ノ形ヲ有スル。

$$f(x) = \int^x \frac{dt}{\{g(t)\}^2}$$

コノ  $g(x)$  ハ次ノ性質ヲ有スル。

- i)  $g(x)$  ハ整函数
- ii) ソノ零点ハスベテ一位ナリ。
- iii)  $\{g(x)\}^{-2}$  ノ極ノ近傍ニ於ケル Laurent 展開ノ留数ハスベテ0ナリ。 (逆ニ勿論成立スル)

次ニ三ツノ條件ヲ形ヲ変更スル。 $g(x)$  ノ一ツノ零点ヲ  $a$  トスレバソノ近傍ノ Taylor 展開ハ

$$g(x) = g'(a)(x-a) + \frac{1}{2} g''(a)(x-a)^2 + \dots$$

但シ ii) ノ條件ニヨリ  $g'(a) \neq 0$  デナケレバナラヌ。コレヨリ

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g'(a)(x-a)} \left\{ 1 - \frac{g''(a)}{2g'(a)}(x-a) + \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}^2 = \frac{1}{g'(a)^2(x-a)^2} \left\{ 1 - \frac{g''(a)}{g'(a)}(x-a) + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{g'(a)^2(x-a)^2} - \frac{g''(a)}{g'(a)^3(x-a)} + \dots (x-a)$$

故 =

$$g''(a) = 0$$

即チ、 $g(x)$  ハ  $\infty$  ノ 零 点 = 於 テ、 $\infty$  ノ 第 二 次 導 函 数 が 必 ズ 0 ト  
ナ ル ヲ ナ 整 函 数 デ ア ル。ヨ ヅ チ  $g''(x)/g(x)$  ナ ル 商 ヲ 作  
ツ テ 見 ル ト、 $g(x)$  ノ 零 点 = 於 テ ハ、零 点 が 一 位 デ ア ル 故 =  
一 定 ノ 値 ヲ 有 ス ル。即 チ 商 ハ  $x$  平 面 ノ 全 有 限 部 分 デ 有 限 ナ 数  
値 ヲ 有 ス ル 故 = 整 函 数 デ ナ ケ レ バ ナ ラ ナ イ。コ レ ヲ  $P(x)$  ト  
ス レ バ

$$(2) \quad \frac{d^2 g}{dx^2} = P(x) \cdot g$$

即チ 上 述 ノ 三 ツ ノ 性 質 ヲ 具 備 シ テ キ ル 解 析 函 数 ハ (2) ノ 形 ノ  
微 分 方 程 式 = 於 イ テ  $P(x)$  = 適 當 ナ 整 函 数 ヲ 入 レ る 場 合、微  
分 方 程 式 ノ 解 = ナ ヅ テ キ ル ワ ケ デ ア ル。

又 逆 = 斯 様 ナ 微 分 方 程 式 ノ 解 ハ 常 = 上 ノ 三 ツ ノ 性 質 ヲ 持  
ツ テ キ ル。ソ レ が 整 函 数 デ ア ル コ ト ハ 微 分 方 程 式 ノ 形 ヲ 容  
易 = ワ カ ル。零 点、一 位 デ ア ル コ ト ハ *linear, homogen*  
ナ 二 次 微 分 方 程 式 ノ 解、一 般 的 性 質 デ ア ル。零 点 ノ 近 傍 = 於  
ケ ル  $\{g(x)\}^{-2}$  ノ *Laurent* 展 開 デ 留 数 が 0 = ナ ル コ ト  
モ 亦 明 カ デ ア ル。從 ツ テ  $P(x)$  = 勝 手 ナ 整 函 数 ヲ 入 レ タ ト キ  
(2) ノ 解  $g(x)$  ヲ 以 テ  $f(x)$  ヲ ツ ク レ バ コ ノ *Riemann* 面 ハ 代

數的合歧点ヲ有セザルモノデアル。

## (II) 微分方程式ノ二三ノ性質

微分方程式

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = P(x) \cdot g \quad P(x); \text{整函数}$$

i) *Fundamentallösungen* ヲ形成スルニツノ解

$g_1(x)$  ト  $g_2(x)$  トハ共通根ヲ持タナイ。

何トナレバ  $C_1, C_2$  ヲ共ニ  $0$  デナイ常数トシテ

$$g(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

ナル解ヲ作ル。  $g_1(a) = 0$   $g_2(a) = 0$  デアレバ勿論

$$g(a) = C_1 g_1(a) + C_2 g_2(a) = 0$$

次ニ  $g'_1(a) \neq 0, g'_2(a) \neq 0$  デアルカラ

$$g'_1(a) = C_1 g'_1(a) + C_2 g'_2(a) = 0$$

トナルヤウニ  $C_1, C_2$  ガエラベル。  $g(x)$  ハ  $x=a$  ヲ少クモ二位ノ零點ニ持ツコトトナラカラ、ソレハ恒等的ニ  $0$  デナケレバナラヌ。  $C_1 = C_2 = 0$  (矛盾)

ii)  $g_1(x), g_2(x)$  ハ同一ノ  $x=a$  ニ對シテソレヲノ對數的導函数ガ等シクナルコトハナイ。

何トナレバ同時ニ  $0$  デナイ様ナ  $C_1, C_2$  ニ對シテ

$$g(a) = C_1 g_1(a) + C_2 g_2(a) = 0$$

$$g'(a) = C_1 g'_1(a) + C_2 g'_2(a) = 0$$

トナルヤウナ  $a$  が存在シテハナラナイ。

依ツテ

$$\begin{vmatrix} g_1(a) & g_2(a) \\ g_1'(a) & g_2'(a) \end{vmatrix} = g_1(a) g_2'(a) - g_1'(a) g_2(a) \\ = g_1(a) g_2(a) \left\{ \frac{g_2'(a)}{g_2(a)} - \frac{g_1'(a)}{g_1(a)} \right\} \neq 0$$

即チ  $g_1(x), g_2(x)$  ノ零点以外ノ  $x$  ニハ

$$\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} \neq \frac{g_2'(x)}{g_2(x)}$$

iii)  $P(x)$  が  $m$  次ノ有理整函数ナルトキ  $g(x)$  ハ階数  $\frac{m+2}{2}$  ナル有限階超越整函数 = ナル。コレ = 関シテハ Einar Nille ノ研究 = ヨリ詳シク知レテキル。

iv)  $P(x)$  が超越整函数ナルトキ  $g(x)$  ハ無限階超越整函数 = ナル。コレハ iii) ノ結果 = 於テ  $m \rightarrow \infty$  ナラシムレバ、

$g(x)$  ノ階数モ亦  $\infty$  = 近ヅクコトヨリ容易 = 想像サレルコトガアルガ、次ノ様 = シテ嚴密 = 証明スルコトが出来ル。

全有限平面デ有理型ナル函数ノ對數的導函数ノ *Schmiegungsfunktion* = 関スル定理ヲ使フ。

今斯様ナ函数ヲ一般 =  $f(x)$  トスルト若シ  $f(x)$  が有限階ノ函数ナルトキハ

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r)$$

ヨツテ  $g(x)$  ヲ微分方程式ヲ満足スル有限階函数トスレバ

$g(x)$  ト同時ニ  $g'(x)$  モ亦有限階ナルカラ

$$m\left(r, \frac{g'}{g}\right) = O(\log r)$$

$$m\left(r, \frac{g''}{g'}\right) = O(\log r)$$

$$\frac{g''}{g} = \frac{g'}{g} \cdot \frac{g''}{g'} \quad \text{デアルカラ}$$

$$m\left(r, \frac{g''}{g}\right) \leq m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + m\left(r, \frac{g''}{g'}\right) = O(\log r)$$

$P(x)$  ハ整函数デアルカラ

$$T(r, P) = m(r, P) = m\left(r, \frac{g''}{g}\right) \leq O(\log r)$$

故 = 適當ナ常数  $k$  = 對シテ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, P)}{\log r} < k$$

コレハ  $P(x)$  が有理函数、コノカハ特 = 有理整函数デアルコトヲ示ス。故 =  $P(x)$  ヲ超越整函数トスレバ  $g(x)$  ハ無限階整函数デナケレバナラナイ。

### (III) Defekt / 問題

(I) デ問題トシタ函数  $f(x)$  カハ密 =  $N_1(r) = 0$  デアルカラ、ソレ = 就イテハ第二定理 (2. Hauptsatz) ハ次ノ様 = ナル。

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^q m(r, a_\nu) < 2T(r) + S(r)$$

斯様ナ函数 = ツイテハスベテノ defective Werte = ワタル Defekt / 和  $\sum_{\nu=1}^q \delta(a_\nu)$  カ最大値 2 = 達スルコトガ  $N_1(r) \neq 0$  ナル函数

ヨリモ多ク期待セラレル。周知ノ實例

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^g} dt$$

デハ  $f = \infty$  トスベテノ有限ナ Zielwert = マスル  $\alpha$  Defekt  
ノ和ハ實際 2 = ナル。コノ函数ハ階数  $g$  デアルガ  $g(\infty) = e^{\frac{1}{2}g^2}$   
デアルカラ

$$P(x) = \frac{g(g-1)}{2} x^{g-2} + \frac{g^2}{4} x^{2g-2} \quad (2g-2 \text{ 次})$$

即チ  $f(x) = \int_0^x e^{-t^g} dt$  ハ  $P(x)$  ヲ上ノ様ニトツタトキノ微  
分方程式ノ解  $g(x) = e^{\frac{1}{2}x^g}$  ヨリ作ラレ、ソノ gesamtdefekt  
丁度 2 = ナツヲキル。

第二定理 (3) ハ defekte Werte ノ 數ハ可附番無限マ  
デヌクアルコトヲ許スノデアアルガ、コノ實例ハ未ダ一ツモ知  
ラレテキナイ。

既ニ Literatur = 見エル實例

$$(4) \quad f(x) = \int_0^x e^{e^t} dt$$

デハ 正ノ  $\alpha$  Defekt ヲ有スル値ハ  $f = \infty$  レツデアルカラ  
gesamtdefekt ハ 1 デアツテ 2 = 違シナイ。コノ例デハ

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}e^x}$$

$$P(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x$$

Picard ノ 除外値ノ概念ハ Borel ノ 除外値ノ概念 =  
拡張セラレ、コレハ 更ニ Nevanlinna ノ defekter Wert

ナル概念ニ拡張セラレタノデアルガ、除外値ノ知ラレテキル  
實例ハ何レモソレヲ有限個シカ持ツテキナイ。即チ第ニ定  
理ニ関シテハ實例ヨリモ理論ノ方が遙ニ進ンデキルト見ルコトが  
出來ル。

無數ニ多ク除外値 (defekter Wert) ノアル實例ヲ作  
ルコトハ現今一般ニムツカシイト信ゼラレテキル。 *unangreifbar*  
*heim gegenwärtigen stande der Wissenschaft*  
ト云フ程デハナクトモ困難ニ相違ナイ。然シテラ *defekter*  
*Wert* ハ *Umkehrfunktion* ノ *direkt kritische*  
*Singularität* デアルトイフ予想 (Nevanlinna-  
Ullrich) ヲ正シイトスレバ、コレト *ahlfors* ノ定理 (階  
數  $\rho$  ナル全有限平面ニ於テ有理型ナル函数ノ *Umkehrfunktion*  
ノ *direkt transzendente Stelle* ノ數ハ  $2\rho$  ヲ超ヘナ  
イ) トカラ *defekte Werte* ヲ無數ニ持ツ函数ハ無限階デ  
ナケレバナラナイ。

而シテ *gesamtdefekt* が 2 デアレバスベテ 1 *Stelle* ノ  
*Verzweigungsindex* が 0 デアルカラ  $N_1(r) = 0$  ナル  
函数デナケレバナラナイ<sup>2)</sup>。コレヨリ以上ノ様ナ性質ヲ有スル  
函数  $f(x)$  ハ  $P(x)$  ヲ超越整函数トシタトキノ微分方程式ノ  
解  $g(x)$  ヲリ作ラレル筈デアルトイフコトが出來ル。

但シ、ソレハ單ニ存在スル関連性ヲ意味スルダケデ實際  
コノ方法ヲ出來ネバナラスト云フノデハナイ。コノ方法デウ  
マク行クタメニハ微分方程式ノ積分 ( $P(x)$  が超越函数ナル  
場合ノ) ヲ無限階函数ニ關スル知識ノ増大が先決問題デア

ル。

註1)  $f(x) = \int \frac{dt}{\{g(t)\}^2}$  , Schwarz, 導函数ヲ作ッテ見ルト

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right\}^2 = -2 \frac{g''(x)}{g(x)} = -2P(x)$$

トナル。

註2) Verzweigungsindex の Charakteristik  $\Gamma(r)$   
ヲ單位トシテ量ルノデアルカラ  $V. Index$  が0トナ  
ルタ  $x=1$  必ズ  $\sum N_i(r)=0$  ナルヲ要シナイノデア  
ルガ  $N_i(r)=0$  ナルトキ最モ大キト確率ヲ以ツテ  
*gesamtdefekt* が2トナルコトが期待サレル。然  
シナカラ  $f(x) = \int_0^x e^{e^t} dt$  ナルヤウナ例モアルカラ  
絶對的ニハ期待出来ナイ。  $P(x)$ ヲ原点ニ對シテ非對  
稱性ノモット多イ整函数ニエラバナケレバナリ。