



Title	二重ノ近傍系ニヨル収斂ノ定義ニ就テ II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 129, p. 203-207
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74502
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

577. 二重ノ近傍系=ヨル収斂ノ定義=就テ II

角 谷 静 夫 (阪大)

次= äusseres Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足
シナイ $\mathbb{W}$ -空間ノ一例ヲ示サウ。

R ヲ $1, 2, 3, \dots, \omega$ ヨリ成立スル空間トシ R =於
ケル各点ノ近傍系ヲ次ノ如ク定義スル。

1° $\{U(n)\}$ は $U(n) = n$ + ル近傍一ツヨリ 成ル。

$$n = 1, 2, \dots$$

2° $\{U(\omega)\}$ は $U_n(\omega) = (n, n+1, \dots, \omega)$ + ル近傍
($n = 1, 2, \dots$) ヨリ 成ル。

3° $\{V(n)\}$ は $V(n) = (1, 2, \dots, n)$ + ル近傍一ツ
ヨリ 成ル。

4° $\{V(\omega)\}$ は $V_\alpha(\omega) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \omega)$
+ ル近傍全体ヨリ 成ル。 $\alpha = \alpha = (a_1, a_2, \dots,$
 $a_n, \dots)$ は $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots,$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = \infty$ + ル如キ 自然数ノ 系列ヲ 表ハ
ス。

此ノ如ク 定義サレタ 近傍系 $\{U(a)\}, \{V(a)\}$ $a \in R$ が前ニ
述ベタ 条件ヲ 満足シテ キルコトハ 明カデアアルカラ R ハ UV -空
間ト考ヘルコトが出来ル。

1° ヨリ 明カナル如ク、コノ空間ニ於テハ 点 n ハ ($n = 1,$
 $2, \dots$) 何レモ 孤立点ヲ 点列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ハ
 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ + ル如ク 並ベタト
キ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = \infty$ + ルトキ、且ツ ソノ 階ノ $\omega = UV$
収斂スル。

コノ空間ニ於テ $\{V(\omega)\}$ が *äusseres Abzählbar-*
keitsaxiom ヲ 満足シテ キナ イコトハ 容易ニ 可カル。實
際 $\{V(\omega)\}$ カラ 任意ニ $\{V_n(\omega)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ヲ

$$V_1(\omega) \subset V_2(\omega) \subset \dots \subset V_n(\omega) \subset V_{n+1}(\omega) \subset \dots$$

+ ル如ク 選ンガトキ 如何ナル n = 對シテモ $V(\omega) \subset V_n(\omega)$

トナラナイ様ナ $\nabla(\omega)$ が存在スル。カナル $\nabla(\omega)$ ナ作ル
 $\lambda \in \mathbb{R}$ 若シ任意 $= a_1 \nabla a_1 \in \nabla_1(\omega)$ ナル如クトリ、 a_n が
 $n = 1, 2, \dots, n-1$ 等シテ定マツタトキ $a_n \nabla a_n \in \nabla_n(\omega)$,
 $a_n > a_{n-1}$, $a_n > n^2$ ナル如ク取り $\nabla(\omega) = (a_1, a_2, \dots,$
 $a_n, \dots, \omega)$ トオケベヨイ。

又コノ空間が前ノ性質(6)ヲ満足シテキナイコトヲ容易
 $= \nabla$ ナル。

Kompakt + UV-空間

UV-空間がUV-収斂ノ意味デ *Kompakt* ナトキ之
 ∇ UV-*Kompakt* デアルト云フ。例ヘバ、上記ノ例ハ
UV-*Kompakt* デアル。任意ノ可附番個ノ点列 $\{a_n\}$
 $(n = 1, 2, \dots)$ ヨリ $a_{k_1} < a_{k_2} < \dots < a_{k_n} < \dots$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{k_n}}{n} = \infty$ トナル如キ部分列 $\{a_{k_n}\}$ ナ撰バコトが
出ルコレハ明カ $= \omega$ ト云フ点 $=$ UV-収斂スルカラデアル。

(7) UV-*Kompakt* + UV空間が *äusseres Abzähl-*
barkeitsaxiom ヲ満足スレバ UV-収斂ト U-収斂
トハ同等デアル。

但シコノ ∇ U-収斂ト云フハ UV-空間ヲ定義シテ
キル U 近傍係 $=$ ヨル普通ノ収斂ノコトデアル。

証明: $a_n \xrightarrow{UV} a$ ナラバ $a_n \xrightarrow{U} a$ トナルコトハ (5) ヨリ明カ
デアルカラ $a_n \xrightarrow{U} a$ ナラバ $a_n \xrightarrow{UV} a$ ナルコトヲ証明
スレバヨイ。

ヨツテ $a_n \xrightarrow{U} a = \nabla a_n \xrightarrow{UV} a$ ナル如キ点列 $\{a_n\}$ ト

$\{a\}$ が存在スレバ矛盾がオコルコトヲ示セバヨイ。

先ヅ $a_n \xrightarrow{\text{UV}} a$ ヨリ (6) = ヨツテ $\{a_n\}$ ノ部分ヨリ $\{a_{k_n}\}$ ヲトツテ $\{a_{k_n}\}$ ノ如何ナル部分列モ $a = \text{UV}$ -収斂シナイヤウ = スルコトが出来ル。空間ハ UV-Kompakt デアルカラ $\{a_{k_n}\}$ ノ適當ナ部分列 $\{a_{k_{n_i}}\}$ ハ空間ノ一 points = 収斂スル筈デアル。シカシ上デ述ベタコトヨリ $b \neq a$ デナケレバナラナイ。

然ルニ他方 $a_n \xrightarrow{\text{UV}} a$ デアリ、 $\{a_{k_n}\}$ ハ $\{a_n\}$ ノ部分列デアルカラ $a_{k_n} \xrightarrow{\text{UV}} a$ デナケレバナラナイ。即チ $b = a$ デナケレバナラナイ。コレハ矛盾デアルカラ $a_n \xrightarrow{\text{UV}} a$ ナラバ $a_n \xrightarrow{\text{UV}} a$ デナケレバナラナイ。(証明終)

コノ証明 = *äusseres Abzählbarkeitsaxiom* が必要ナコトハ上ニ述ベタ例ニ於テハ UV kompakt ナ UV -空間デアリナカラコノ定理が成立シナイコトカラ分ル。

Hausdorff / 2-es abzählbarkeitsaxiom = 對應スル äusseres Abzählbarkeitsaxiom

始メニ述ベタ ∇ -近傍系 = 關スル條件ノ外ニモウ一次ノ條件が考ヘラレル。

2-4° 任意ノ $\nabla(a)$ ト b ト = 對シテ $\nabla(a) \subset \nabla(b)$ トナル如キ b ノ近傍 $\nabla(b)$ が存在スル。

コレハ

1-4° 任意ノ $b \in \nabla(a)$ = 對シテ $\cup(b) \subset \cup(a)$ ナル b ノ近傍 $\cup(b)$ が存在スル。

ト云フ條件 = 對應スルモノデアル。

然シナガラ $\{\nabla(a)\}$ がコノ様ナ條件ヲ満足スルト云フコトハ非常ニ強イ條件デアルコトハ次ノ定理ニヨツテワカル。

(8) UV -空間デ $\{\nabla(a)\}$ が條件 2-4° ヲ満足シテ居レバ $\{\nabla(a)\}$ 全体ハ一ツノ $\{\nabla\} = \text{ヨツテオキカヘラレル}$ 。

即チ空間全体 $= a = \text{無關係ナ一ツノ近傍系 } \{\nabla\}$ ヲ作ツテ点列ノ收斂 $a_n \xrightarrow{UV} a$ ヲ以テ $a \in \text{一ツノ } \nabla = \text{對シテ } a_n \in \nabla (n=1, 2, \dots)$ デ且ツ任意ノ $U(a) = \text{對シテ始メトスベテノ } a_n \in U(a)$ トナルト云フコトニヨツテ定義ヲカヘルコトが出来ル。

コノ様ナ $\{\nabla\}$ ヲ作ルタメニハ空間ノ任意ノ点 a_0 ニ對シテ $\{\nabla\} = \{\nabla(a_0)\}$ トオケバヨイノデアル。(アル集合ガ全部一ツノ $\nabla(a) = \text{含マレテキルト云フコトハ } a = \text{ハ無關係ナノデアル!})$

コノヤウナ條件 2-4° ヲ満足スル空間ノ一例ハ次ノ述ベル *doppel-metrischer Raum* ニヨツテ與ヘラレル。