



Title	複素変数ノ函数ガ正則ナルタメノ條件
Author(s)	清水, 辰次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 131, p. 223-226
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74507
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

582. 複素変数ノ函数が

正則ナルタメノ條件

清水 辰次郎 (阪大)

實変数 x ノ函数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ 上ニテ無限回微分可能ナルトキ $a \leq x \leq b$ 上ニテ $|f^{(n)}(x)| \leq A_n$ トオケバ、 $f(x)$ が $a < x < b$ 上ニテ解析函数ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ、 η, K ヲ正数トスルトキ $A_n < \eta n! K^n$ ナルコトデアアルハ解析学ノ書物 (例ヘバ藤原氏、解析學第一卷) ニアルコトデアアルガ、此ヲ複素変数 z ノ函数 $f(z)$ ニ関シテハ其ノ儘ハアテハマラナイ。何者、 $f(z)$ ハ *Cauchy-Goursat* ノ定理ニヨリ或ル領域ニテ $f'(z)$ ノ存在カラ $f(z)$ ノ解析函数ナルコトが結論セラレルカラデアアル。然シ次ノ如ク少シク変形スレバ兎モ角定理ノ形ニハナル。

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

トオクトキ、 $u(x, y), v(x, y)$ が一点 z_0 ノ近傍 U_{z_0} 上ニテ無限回偏微分可能デアリ且ツ z_0 上ニテ $f^{(n)}(z_0)$ ^(註) $n=1, 2, \dots$ が存在スルトス。シカルトキ $f(z)$ がソノ近傍ニテ解析函数ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ

(註) 上述ノ假定ノ下ニ z_0 上ニテ $f(z)$ ノ *rectilinear n -th derivative* $\frac{d^n f}{dz^n \pi \theta}$ が存在スルコトがワカルガ、 $\frac{d^n f}{dz^n \theta}$ が θ ニ無関係ニ定ルトキ、之レヲ z_0 上ニテケル微分ト云ヒ $f^{(n)}(z_0)$ デ表ハスコトニスル。

$$U_{z_0} = \tau$$

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| < A_{n-j,j}, \quad \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| < B_{n-j,j}, \quad j=0, 1, \dots$$

トオクトキ或整数 $\eta, K = \text{對シ}$

-----, n

$$A_{n-j,j} < \eta n! K^n, \quad B_{n-j,j} < \eta n! K^n$$

が成立スルコトデアル。

此ノ定理ニテ $f^{(n)}(z_0)$ ノ存在マ u, v ノ偏微分可能性ハ $f(z)$ が解析函数ナラバ必要ナルコト明カデアアルカラ $f(z)$ が或ル点 z_0 ノ近傍ニテ正則ナルタメノ必要且充分ナル條件トシテ上ノ假定ヲ述ベルコトモデキル。

証明ハ簡單デ先ヅ必要ナルコトハ z_0 ヲ中心トシ U_{z_0} ニ含マレル充分小サナ円 Γ ヲ、半径ヲ d トシ、円周上ノ $|f(z)|$ ノ最大値ヲ G , 若ヘル円内部ノ点ヲ z トシ z ト円周トノ最短距離ヲ δ トスレバ Cauchy ノ積分表示

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$

ヨリ

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq \frac{dG}{\delta^{n+1}}$$

正則性ヨリ

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{i^j} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)$$

依ツテ

$$\frac{A_{n-j,j}}{n!} \leq \frac{dG}{\delta^{n+1}}, \quad \frac{B_{n-j,j}}{n!} \leq \frac{dG}{\delta^{n+1}}$$

逆 = 充分ナルコトハ $z_0 = \tau$ 微分 $f^{(n)}(z_0)$ が存在スルカ
 与

$$\frac{|f^n(z_0)|}{n!} \leq \frac{\left| \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{x_0} \right| + \left| \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^n} \right)_{x_0} \right|}{n!} < 2\eta K^n;$$

$$z_0 = x_0 + iy_0.$$

依ツテ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

ハ z_0 ヲ中心トスル充分小ナル円内部ニテ收斂シテ、正則
 函数 $g(z)$ ヲ表ハシ、 $g^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$ $n=0, 1, 2,$
 -----,

$$\text{即チ} \quad g(z) = u^*(x, y) + iv^*(x, y)$$

トスルトキ

$$\left(\frac{\partial^n u^*}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\left(\frac{\partial^n v^*}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)_{x_0, y_0}$$

$$\left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, \\ j = 0, 1, \dots, n \end{array} \right)$$

然ルニ $A_{n-j,j}, B_{n-j,j}$ ニ関スル假定カラ

$$\sqrt[n]{A_{n-j,j}}, \quad \sqrt[n]{B_{n-j,j}}$$

ハ共 $= nL$ ヨリ小トナル。ココ $= L$ ハ 或ル正数ヲ表ハス。
依ツテ

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{A_{n-j,j}}}, \quad \sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{B_{n-j,j}}} \quad j=0,1,2,\dots,n$$

ハ悉ク発散スル。

Carleman, Denjoy 等, *quasi-analytic function* ノ理論カラ u, v が夫々一点ニ於ケル微分係數ハ悉ク與ヘラレレバ偏微分可能ナル函数ハ上ノ條件ヲ満足スレバ u, v が夫々唯一ツニ決定セラレル (Gevrey; *Comptes rendus, Paris* 177) コトカラ上ノ如キ u, v 從ツテ $f(x)$ ハ唯一ツシカ存在シ得ズ $g(x)$ ト一致スルコトガワカル。

從ツテ $f(x)$ ハ x ノ近傍ニテ解析函数ヲ表ハス。