OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	雑記 I
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 131, p. 226-229
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74508
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

583. 雑記 I

南雲 道夫 (阪大)

§ 反覆近似法

古典的解析時ニ陰函数ヤ微分方程式ノ如キ函数方程式ニ於テ，反覆近似法（逐次近似法）ガ理論上カラモ應用上カラモ重要ナ一方法デアルコトガ知ラレテヰル。次ニ之ニツイテ極サヽヤカナ注意ヲ加ヘタイ。

[1] 問題が普通ノ陰函数ニモ亦函数空間ニ於ケル函数方程式ニモ共通ナル点ヲ用ヒカニスルタメ，抽象空間中デ最モ具体的ナル線状距離空間(B)ニ於ケル方程式

$$\xi = F(\xi)$$

ヲ考ヘヨウ。

線状距離空間(B)トハ線状(Vektor ト同様ニ一次結合ガ成立スル)デ絶對値(norm)$|\xi|$ガ定義サレ $|\xi-\eta|$ヲ ξ,η ノ距離トシテ完全性(Cauchy ノ収斂條件成立)ヲ有スル空間デアル。例ヘバ $a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル連続函数 $f(x)$ヲ要素トシ，ソノ全体カラ成ル集合ヲ C トスルトキ

$$|f| = \underset{a\leqq x\leqq b}{Max}\left[|f(x)|\right]$$

ヲ以テ要素 f ノ絶對値トスレバ，C ハ(B)空間デアル。(詳細ハ Banach: Theorie des Operations linéaires 参照)

今 $F(\xi)$ ガ Lipschitz ノ條件

$$|F(\xi_1)-F(\xi_2)| \leqq k|\xi_1-\xi_2|; \quad \underline{k<1}$$

ヲ満足シテヰルトスル。シカラバ

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n)$$

ニヨッテ $\{\xi_n\}$ヲ定義スレバ，$F(\xi)$ガ有界閉集合 $\mathfrak{M}$ デ定義サレテヰテ $\xi_n \in \mathfrak{M}$ ナラバ ξ_nハ $\xi = F(\xi)$ ノ解ニ収斂スル。

何トナレバ

$$|\eta_{n+p}-\eta_n| \leqq k|\eta_{n+p-1}-\eta_{n-1}| \leqq \cdots\cdots \leqq k^n|\eta_p-\eta_0|$$
$$\leqq k^n\Delta \qquad (\Delta\ \text{ハ}\ \mathfrak{M}\ \text{ノ直径})$$

[2] 此ノ方法ハ勿論非線形距離空間（但シ完全性ヲ要ス）ニ＝擴張出來ル。即チ $F(P)$ ハ $P\in\mathfrak{M}$（有界閉集合）$\subset\mathfrak{R}$ デ定義サレソノ値ガ又 $\mathfrak{R}$ ニ屬シ

$$\rho\big(F(P_1),F(P_2)\big)\leqq\varphi\big(\rho(P_1,P_2)\big)$$

$\rho(P_1,P_2)$ ハ P_1,P_2 ノ距離，$\varphi(x)$ ハ $0\leqq x$ デ單調增加連續函數デ

$$0\leqq\varphi(x)<x$$

ナル性質ヲ有スル。シカラバ

$$P_{n+1}=F(P_n)$$

ニヨッテ $\{P_n\}$ ヲ定メレバ，$\{P_n\}\subset\mathfrak{M}$ ナラバ之レハ $P=F(P)$ ノ解ニ收斂スル。證明ハ容易デアル（勿論解ハ只一ッ）

[3] サテ[1]ヲバ直チニ常微分方程式

$$\frac{d\eta}{dt}=f(t,\eta),\qquad \eta(t_0)=\eta_0,$$

ニ適用セントスルトキ，一寸差支ヘルハ Lipschitz 常數 L ノナル條件デアル。

次ニ $f(t,\eta)$ ガ條件

$$|f(t,\eta_1)-f(t,\eta_2)|\leqq L|\eta_1-\eta_2|$$

ヲ滿足セルトキ（L ハ正常數ノヨリ大ナルヨイ）ニハ

$$\|\eta(t)\|=\text{上限}\left|\eta(t)e^{-L'|t-t_0|}\right|,\qquad L<L'$$

ニヨッテ要素 $\eta(t)$ ノ絶對値 $\|\eta(t)\|$ トスル函數空間ヲ考ヘレバヨイ。何トナレバ

$$F[\eta(t)] = \eta_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \eta(\tau))\, d\tau$$

トスレバ

$$\left| F[\eta_1(t)] - F[\eta_2(t)] \right| \leqq L \left| \int_{t_0}^{t} \left| \eta_1(t) - \eta_2(t) \right| dt \right|$$

之レカラ容易ニ

$$\left\| F[\eta_1] - F[\eta_2] \right\| \leqq \frac{L}{L'} \left\| \eta_1(t) - \eta_2(t) \right\|$$

$\frac{L}{L'}$ ク1 デアルカラ

要スルニ各種ノ問題ニ對シ適當ナル技巧ヲ用フレバ，之ヲ一般的ナ場合ニ統一出來ルコトヲ示シタニスギナイ。抽象的ナモノト具体的ナモノトノ結合点，ソコニ自分ハ興味ヲ感ズル。