



Title	表現論ニ於ケル一定理ノ証明
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 131, p. 229-235
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74509
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

584. 表現論 = 於ケル $\sim$ 定理ノ証明

大 島 勝

K ヲ代表的肉体, Q ヲ位数 q ノ有限群トスル K ノ標
數ガ零又ハ q ヲ割ラナイ素數デアルトキハ, $K =$ 於ケル Q ノ

異ナル既約表現ノ個數ハ、 G ノ共軌類ノ個數ニ等シイ。中山
及ビ正田先生ハコノ良ク知ラレテキル定理ヲ次ノ如ク一般ニ
セラレタ。

(Über die Darstellung einer endlichen
Gruppe durch halblinare Transformationen, Jap. Journ. of Math 12 (1936))

h_g ヲ G ノ不変部分群トスルトキ、 h_g ノ絶対既約表現
ヨリ誘導セラレタ G ノ K ニ於ケル異ナル表現ノ個數ハ
 h_g ニ含マレテキル G ノ共軌類ノ個數ニ等シイ。

前記論文ニ於テハ、コノ定理ヲ halblinear Trans-
formationノ理論ニヨリ導カレタガ、次ニ示ス如ク
Brauerノ方法ヲ用フルコトニヨリ直接ニ証明スルコト
ガ出來ル。

(Über die Darstellung von Gruppen in
Galoisschen Feldern, Acta arithmetica 195 (1935))

且ツ G ガ p ヲ割レルトキデモ $(G: h_g)$ ガ p ト素デアレ
バ、コノ場合ヲモ含メテ、次ノ定理ヲ得ル。

定理: h_g ヲ G ノ不変部分群デ $(G: h_g)$ ハ p ヲ
割レナイトスル。 h_g ノ絶対既約表現ヨリ誘導セラレタ G
ノ K ニ於ケル異ナル表現ノ個數ハ h_g ニ含マレテキル G
ノ共軌類ガ、ソノElementノ位数ガ p ト素ナルモノノ
個數ニ等シイ。

$$G = h_g + h_g G_1 + \dots + h_g G_{t-1} \quad t \not\equiv 0 \pmod{p}$$

トスレバ

$$\overline{Q} = \overline{h}_y + \overline{h}_y G_1 + \dots + \overline{h}_y G_{t-1}$$

コゝ = $\overline{Q}, \overline{h}_y$ ハ夫々 Q, h_y / $K =$ 於ケル Gruppenring
ヲ表ハス。

補助定理 1. $\mathcal{R}$ $\overline{h}_y$ / 根基トスレバ

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \mathcal{R} G_1 + \dots + \mathcal{R} G_{t-1}$$

ハ $\overline{Q}$ / 根基デアール。

証明: $\overline{\mathcal{R}}$ ハ明ラカ = $\overline{Q}$ / nilpotent Ideal $\neq$
アール、且ツ

$$\overline{Q}/\overline{\mathcal{R}} \cong \overline{h}_y/\mathcal{R} + \overline{h}_y/\mathcal{R} G_1 + \dots + \overline{h}_y/\mathcal{R} \cdot G_{t-1}$$

故 = $\overline{d} = (t^a d)^t \neq 0 \pmod{p}$

コゝ = $d, \overline{d}$ ハ h_y / reduziert Darstellung
 $\mathcal{O}$ / 判別式, 及ビ $\mathcal{O}$ ヨリ誘導セラレタ Q / 表現, 判別式
デアアリ、 a ハ $\mathcal{O}$ / 次数トスル。

補助定理 1 ヨリ

補助定理 2. h_y / 絶対既約表現ヨリ誘導セラレタ Q /
 $K =$ 於ケル表現ハ完全可約デアール。

Q, h_y / 絶対既約表現ヲ夫々 ψ_i^* , φ_j デ表ハシ、ソ
ノ指標ヲ χ_i^* , χ_j トスル。Levitcki = ヨリ

$$\chi_{\lambda}^*(H) = \sum_i \gamma_{i\lambda} \chi_i(H). \quad H \in h_y$$

$$\psi_{\chi_i}(G) = \sum_{\lambda} \gamma_{i\lambda} \chi_{\lambda}^*(G) \quad G \in Q$$

但シ ψ_{χ_i} ハ θ_i ヨリ誘導セラレタ $\mathcal{O}$ ノ表現ノ指標ナル、 ψ_{χ} が $\mathcal{O}$ ノ不変部分群ナルカラ

$$\gamma_{i\lambda} = \frac{\chi_{\lambda}^*(E)}{S_i \chi_i(E)} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

従ツテ

$$\chi_{\lambda}^*(H) = \frac{\chi_{\lambda}^*(E)}{S_i \chi_i(E)} \sum_j \chi_i^{(j)}(H)$$

コトハ S_i ハ θ_i ト $\mathcal{O}$ = 於イテ相似ナル表現ノ個数 $\chi_i^{(j)}(H)$ ハソノ指標ヲ表ハス。

$\mathcal{O}$ = 於テ互ニ相似デナイ ψ_{χ} ノ既約表現ヲ $\theta_1, \theta_2, \dots, \dots, \theta_l$ トスレバ、 θ_i ヨリ誘導セラレタ $\mathcal{O}$ ノ表現ハ互ニ同値デナク、ソノ指標 $\psi_{\chi_i} (i=1, 2, \dots, l)$ ハ linear unabhängig デアル。

以下 $\mathcal{O}$ ノ表現ノ中、 ψ_{χ} ノ表現ヨリ誘導セラレタ表現ノミヲ考ヘ、ソノ指標ヲ ψ_{χ} デ表ハスコト＝スル。即チカカル $\mathcal{O}$ ノ表現＝於イテ、Brauer ノ証明＝於ケル既約表現ノ役目ヲ θ_i ヨリ誘導セラレタ $\mathcal{O}$ ノ表現 Γ_i ガスルヲケデアル。

補助定理3. 位数ガ p ト素ナル ψ_{χ} ノスベテノ Element R = 對シテ $\psi_{\chi}(R) = 0$ デアレバ、 $\mathcal{O}$ ノスベテノ Element R = 對シテ $\psi_{\chi}(R) = 0$

証明: 明ラカニ $\psi_{\chi}(R) = 0$, $R \notin \psi_{\chi} + \dots$ 故、Brauer ノ場合ト同様ニシテ証明出來ル。

ψ_{χ} = 含マレテキル $\mathcal{O}$ ノ共轭類ガ、ソノ Element ノ

位数が p ト素ナルモノヲ, $C_1, C_2, \dots, C_l$ トスルト
キ, 先ツ

$$l \leq l$$

デアル。(Brauer) 証明参照)

故ニ l 個ノ異ナル既約表現 Γ_i が存在スルコトが云
ヘレバ我々ノ定理が証明出来タコトナル。

ソノ爲ニ $l < l$ ト假定スル。然ルトキハ

$$\sum_k \eta_k \psi_{\chi_i}^k = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

ニ於テ $\eta_k \in K$ ハスベテハ零デナル取ル事ガ出来ル。從ツテ
スベテノ指標ニ對シテ

$$(I) \quad \sum_k \eta_k \psi_{\chi}^k = 0$$

$\psi_{\chi_i}^k, \psi_{\chi}^k$ ハ夫々 C_k ノElementニ對スル $\psi_{\chi_i}, \psi_{\chi}$ ノ
値ヲ表ハス。(I)ガ成立シナイコトヲ云ヘバ充分デアル。ソノ
爲ニ g ヨリ位数ガ小ナル群ニツイテハ定理ハ既ニ成立スルモ
ノト假定スル。

Q ヲ位数 q ガ p ト素ナル h_g ノElementトシ。 Q
ノ h_g ニ於ケル Normalizerノ p ニ属スル Sylow-
gruppeヲ P トシ、ソノ位数ヲ p^r トスル。 Q ト P ハ位
数 qp^r ノ h_g ノ部分群 $\tilde{P}$ ヲ生成スル。

Q ニヨリ生成サレタ h_g ノ部分群ヲ U トスレバ

$$\tilde{P} = U \times P.$$

h_g ノ $\tilde{P}$ ニヨル Restklasseノ代表元ヲ $P_1, P_2, \dots$

-----, P_ν トシ、 $\psi(R)$ ヲ $R^\sim$ ノ任意ノ指標トスル。

$R^\sim =$ 含マレナ $\bar{1}$ h_f ノ Element $S =$ 對シテハ $\psi(S) = 0$ ト置ケバ

$$\sum_{\nu=1}^n \psi(P_\nu R P_\nu^{-1}) = \chi(R) \quad R \in h_f$$

ハ h_f ノ指標トナル。 R ノ位数ガ p ト素ナルトキハ

$$\chi(R) = \sum_{\lambda=1}^g z_\lambda \psi(Q^\lambda)$$

コゝニ z_λ ハ $P_\nu R P_\nu^{-1} = Q^\lambda$ ガ成立スル P_ν ノ個數デア
ル。

$R = Q$ ノトキハ

$$z_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

R ガ Q ト $h_f =$ 於テ共軛デナケレバ

$$z_1 = 0$$

從ツテ R ガ Q ト $Q_f =$ 於テ共軛デナケレバ勿論 $z_1 = 0$

$h_f =$ 含マレナ $\bar{1}$ Q_f ノ Element $S =$ 對シテ $\chi(S) = 0$
トスレバ

$$\sum \chi(G_i R G_i^{-1}) = \psi_\chi(R)$$

ハ Q_f ノ指標トナル。

$G Q G^{-1}$ ガ Q ト $h_f =$ 於テ共軛トナル如キ Q_f ノ Element G ノ全体ハ h_f ヲ含マバ Q_f ノ部分群ヲナス、ソ
ノ位数ヲ r トスレバ

$$r \not\equiv 0 \pmod{p}$$

$$\psi_{\chi}(Q) = \sum_{\lambda=1}^g \gamma_{\lambda} \psi(Q^{\lambda})$$

コノ $\psi_{\chi}(Q) =$ ツイテモ (I) が成立シナクテハナラナイ。今 C_{δ} フ $\gamma_{\delta} \neq 0$ ナル共轭類トシ、 Q フ C_{δ} ヨリ取ルトスル。 $\delta \leq g$ ナル故 Q ノ倍数 g ハ素数カ = p ト素デアアル。

(I) ハ次ノ形ニ出來ル。

$$(II) \sum_{\lambda=1}^g \omega_{\lambda} \psi(Q^{\lambda}) = 0$$

$\psi(Q)$ ハ C_{δ} ノミニ關係スルカラ

$$\omega_1 = \gamma_{\delta}, \gamma_{\delta} \neq 0$$

(II) ハ R^{-} ノスベテノ指標 ψ = ツイテ成立シナクテハナラナイ。シカルニ (II) ハ R^{-} = 對シテ丁度 $\mathcal{Q} =$ 對スル (I) ト同様ノ關係式デアリ、シカモ $\omega_1 \neq 0$ ナル故、スベテノ ω_{δ} ハ零デナイ。 $\mathcal{Q}$ ヨリ次数が小ナル群ニツイテハ、カナル形ノ關係ハ成立シナイト假定シタノ故カラ $\mathcal{Q} = \mathcal{H} = R^{-}$ 以外ノ場合ハ、コレヲ証明出來タワケデアアル。 $\mathcal{Q} = R^{-}$ ノトキハ $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \times \mathcal{U}$ ナル故明ラカニ定理ハ成立スル。