OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	雑記 II
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 132, p. 247-252
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74512
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

587. 雑記 II

南雲 道夫 (阪大)

§ Fredholm の積分方程式について

1 Fredholm の積分方程式

(1) $\varphi(x)+\int K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$

について Fredholm の行列式による解法は，形式が重

ギテ，理論上カラモ應用上カラモアマリ有難クナイ。之レニ代ル種々ナ方法が古クカラ研究サレテヰル。ソノ中デ自分ニ便利ト思ハレルノハ，<u>分解セル核</u>

$$K_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(y)$$

=ヨッテ $K(x,y)$ ニ近似サセル方法デアル。

1° 核が特=上ノ如ク分解セル時=ハ

$$\varphi(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i(x)$$

トオクコト=ヨリ，積分方程式ハ（α_i,β_i イヅレモ一次的=独立）

$$\xi_i+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\xi_j=f_i\qquad(i=1,\cdots\cdots,n)$$

$\left[c_{ij}=\int\alpha_j\beta_i\,dx,\quad f_i=\int f\beta_i\,dx\right]$ ナル聯立一次方程式=帰着スル。

2° ソヲ linear Operator ノ記号デ示セバ

$$(1+K)\varphi(x)=f(x)$$

ソコデ今 $K_n(x,y)$ ヲ充分 $K(x,y)$ ニ近クトリ，

$$K(x,y)-K_n(x,y)=\Delta(x,y)$$

トオキ，$\Delta(x,y)$ ノ Resolvente ヲ $R(x,y)$ トスレバ〔Neumann 級数=ヨリ〕，

$$(1+\Delta)^{-1}=1+R=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\Delta^{\nu}.$$

故ニ　$(\mathbb{1}+R)(\mathbb{1}+K)\varphi=(\mathbb{1}+R)f=g.$

$$(\mathbb{1}+R)(\mathbb{1}+K)=(\mathbb{1}+R)(\mathbb{1}+\Delta+K_n)$$
$$=\mathbb{1}+(K_n+RK_n)=\mathbb{1}+A_n.$$

A_n ハ分解セル核トナルカラ問題ハ 1° ニ帰着シタ。

3° 以上ノ計算（1°, 及ビ 2°）ヲ詳シク辿レバ Fredholm ノ第一，第二，第三定理ガ得ラレル。即チ $1^\circ, 2^\circ$ ヲ合セテ計算スレバ (1) ノ Resolvent ヤ Transponierte Gleichung ($K(x,y)$ デ x, y ヲ交換シタ方程式) トノ関係ガ得ラレル。

尚 (1) ガ Parameter λ ヲ含ンダ形

$$\varphi(x)+\lambda\int K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ノ時ニハ、ソノ Resolvente ガ λ ノ有理型函数 (meromorphe Funktion) トナルコトモ上ノ方法カラ容易ニ分ル。

$|\lambda|\leqq\Lambda$ ノ時 $\|\Delta\|<\frac{1}{\Lambda}$ ($\|\Delta\|=Max|\Delta(x,y)|$) ニトレバ $R(\lambda)$ ハ $|\lambda|<\Lambda$ デ正則，故ニ $A_n(\lambda)$ モ正則。従ッテ $A_n(\lambda)$ ノ Resolvente ハ $|\lambda|<\Lambda$ デ有理型。故ニ K ノ Resolvente ガ有理型．Λ ハ任意ニ大キク出来ルカラ結論ガ出ル。

[2] 以上ハ皆古ク E. Schmidt ガ Math. Ann. 64. (1907) ニ於イテ論ジタモノニスギナイ。（Resolvente ガ有理型ニナルコトハ書イテナイガ）。

次ニ上ノ考ヘヲ抽象化シテ線状距離空間(B)*ニ於ケル方程式

$$\xi + K\xi = \eta$$

ヲ考ヘヨウ。此ノ考ヘ方ハ已ニ1918年ニ F. Riesz が Acta Math. 41 (71頁 — 98頁) ニ発表シタモノデアル。

彼ニヨレバ K が vollstetiger linearer Operator ナラバ、スベテ Fredholm ノ積分方程式ト同様ノ結論が得ラレル。

K が Vollstetiger linearer Operator トハ、$|\xi| \leqq 1$ ナル ξ ノ全体が K ニヨリ (B) 内ノ緊ツタ集合 (kompakte Menge)** ニ変換サレルマウナ linearer Operator ナルコトヲイフ。

---

* 要素ノ一次結合 (Vektor ト同様) が定義サレ、各要素ニハソノ絶対値 (Norm) $|\xi|$ が定義サレタ集合 (空間) デ、且ツ完全性 (Cauchy ノ収斂條件成立) ヲ有スルモノ。例ヘバ $a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル連続函数ヲ要素トシ、ソノ全体カラ成ル集合ヲ C トシ、$|f| = \underset{a \leqq x \leqq b}{Max} (|f(x)|)$ トスレバ、C ハ (B) 空間デアル。

** M が (B) 内デ緊ツテヰルトハ、M ノ任意ノ無限部分集合ガ必ズ (B) 内ニ集積点ヲ有スルコトデアル。例ヘバ特ニ (B) ガ有限次元ノ空間ナル場合ニハ M ガ (B) デ緊ツテヰルコトト M ガ有界ナルコトトハ同等デアル。シカシ (B) ガ無限次元ノ時ニハ有界ダケデハ緊ツタ集合ニハナラナイ。

Fredholm ノ積分方程式ノ場合ニハ $|\varphi(x)| \leqq 1$ ナルコトカラ，$K\varphi$ ハ一様ニ有界且ツ同程度連続トナリ，Ascoli－Arzela ノ定理ニヨリ，之レハ緊ツタ集合ヲ作ル（但シC空間トシテ）。

故ニ K ハ vollstetiger linearer Operator デアル。

所ガ F. Riesz ノ理論ハ易シイケレドモ初等的デハナイ。今假リニ K ガ次ノ性質ヲ有スルモノトスレバ，万事ガ [I] ト同様ナ方法デ証明出來ル。即チ“任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$|K\varphi - K_\varepsilon \varphi| \leqq \varepsilon |\varphi|$$

且ツ $\psi = K_\varepsilon \varphi$，$[\varphi \in (B)]$ ノ張ル空間ハ有限次元デアル。”ヤウナ linearer Operator K_ε ガ存在スル。

從ッテ此処ニ次ノ問題ヲ生ズル。

K ガ vollstetiger linearer Operator ナラバ，上ノヨウナ K_ε ガ存在スルデアラウカ？

之レハ私ニハ未ダ解決出來ナイ。識者ノ御助力ヲ仰ゲ所以デアル。特ニC空間（脚註※）ノ場合ニハ，$K\varphi$ ハ同程度連続デアルカラ，$a \leqq x \leqq b$ ヲ n 等分シ，ソノ分点デ $K\varphi$ ニ一致スルヤウナ頂点ヲ有スル多角形函數デオキカヘレバヨイ。（n 充分大）

又 L^2 或ハ Hilbert 空間ノ場合ニハ $K\varphi$ ヲ有限次元ノ線狀空間デ近似サセ，之ヘノ Projection ヲトレ

バヨイ。