



Title	リーマン面ノ型ニ就イテ
Author(s)	小林, 善一
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 133, p. 257-267
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74514
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

589. リーマン面ノ型ニ就イテ

小林 善一 (東京高師)

§ 1. W -平面上ニ定義サレタ単一連結無限葉ノリーマン面 F ヲ考ヘル。面ノ型問題ハ多クノ方々ニヨツテ研究サレテ居リマスガ $L. Ahlfors$ ノ方法ニ基礎ヲ置クモノハ先ヅ W_0 ヲ面上ノ原点トシテ定メ、面ニ適當ナ *metric*ヲ導入シテ F カラ部分面分 F_p ヲ切り取ル。 F_p ハ W_0 ヲ含ミ、 $p' < p$ ナラバ $F_{p'}$ ハ F_p ヲ含ミ且ツ $p \rightarrow \infty$ ニ對シテ $F_p \rightarrow F$ ナルモノトスル。 F ガ拋物的ナルタメノ十餘條件ハ積分

$$\int \frac{dp}{L(p)}$$

ノ発散デ書カレル。

茲ニ $L(p)$ ハ F_p ノ境界曲線ヲ上ノ *metric*ヲ測ツタ全長デアイル。一般ニ F_p ノ含ム領域ノ数ハ一個デハナイ、証明ニ本質的ナノハ W_0 ヲ含ム領域ノ W_0 ヲ F ノ境界点カラ分ツ連結的ナル境界曲線 $\Gamma(p)$ ニテツデアイルカラ此ノ $\Gamma(p)$ ノ長ヲ以ツテ上ノ被積分項 $L(p)$ ニ替ヘルコトが出来ル。

對數分岐点ニ對シテハ有效デナイマウデスガ、代數分岐点ニ對シテハ、ズット條件ガヨクナル様デス。以下ニツノ例ヲ以テ上ノ效果ヲ調べ見マス。

§2. 面 F の解析函数 $z = z(w) = \text{ヨツテ}$ 單葉円板 $|z| < R$ に描寫サレル。但シ $R \leq \infty$. $z=0$ の w_0 に対応サレル。

準備トシテ使フ記号定義ヲ述ベマス。

(g) -disc: F の單葉円板ヲ同上ニ少クトモ二個ノ特異点アルモノ。

(g) -Vector: (g) -disc ノ有限特異点カラ周ニ立テヌ法線、中心迄。

線狀ノ網 T : (g) -disc ノ球面中心ノ軌跡、前ニ位相樹木ト呼ンダモノ。

角距離: 對應スル (g) -Vectors ノ廻轉角ノ絶對値又ハソノ和。

Cylindrical surface Y : (g) -disc ノ中心ノ軌跡ト二個ヨリ多イ特異点ノ (g) -disc ノ (g) -Vectors ノ全体ヲ面 F ヲ分割シテ出來ル面分ヲ

$$y = \log(w-b) + (m-\alpha)i$$

$$\text{又ハ } y = \log(w-b) + (m+\alpha)i$$

デ y - 平面ニ描寫シ、ソレヲノ境界ヲ F ニ從ッテ貼リ合セテ出來ル連結的ナ面。 b ハ有限分岐点。 m ハ原点カラノ最小角距離。 α ハ面分ノ角巾。

サテ w_0 ヲ有限点トシ、之ノノツテ居ル (g) -Vector ノ角距離ノ原線トスル。 y_0 ヲ w_0 ノ Y 上ノ像トスル。

$$y_0 = \log |w_0 - b_0|.$$

Υ は $\triangle BAC$ の辺 BA , AC 上で切れる。但し

$$A = y_0 + i\theta$$

$$B = y_0 - \theta \quad \text{及} \quad C = y_0 + \theta.$$

$\triangle ABC$ 内 = アル Υ の部分の中 y_0 を含ムモノヲ $Q(\theta)$, $Q(\theta)$ の中 $y > \theta$ ト y_0 を分ツ境界曲線ヲ $\Gamma(\theta)$ ノノ長サヲ $L(\theta)$ トスル。

定理 I. 積分 $\int \frac{d\theta}{L(\theta)}$ が発散スレバ Γ は拋物的

デアル。

証明. $L(\theta)$ の定義カラ

$$2\pi \leq \int_{\Gamma} \left| \frac{d \log z}{dy} \right| |dy|$$

Schwarz の不等式ヲ用ヒテ

$$4\pi^2 \leq \int_{\Gamma} |dy| \int_{\Gamma} \left| \frac{d \log z}{dy} \right|^2 |dy|$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{L(\theta)} \leq K_1 \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \int_{\Gamma} \left| \frac{d \log z}{dz} \right|^2 |dy|$$

$$\leq K_2 (\log R - \log R_0)$$

但し K_1, K_2 は常数, R_0 は $\triangle BAC$ 上ノスベテノ $y =$ 對應スル $|x|$ ノ最小値, Γ が双曲的ナラバ右辺ハ有限デアイル。

§3. Cylindrical surface Υ 上, Γ ノーツノ

有限代数分岐点 $\mathfrak{p}$ の近傍 $\mathcal{H}$ (角巾 $2n\pi$)。 $I(y) \geq 0$ が実軸に平行ナル巾 $n\pi$ の帯を描寫サレル。像ハ筒狀ヲナシ右方ノ境界線ヲ傳ハツテ $\mathcal{Y}$ の他ノ部分ニツナガル。ソレ故 θ が十分大キクナルト BA 上ノ此ノ筒ノ切口ハ開テ、 $\Gamma(\theta) =$ ハ属シナイ。

又 $\mathfrak{p} = \infty$ ノトキハ之レ=属スル (g) -Vector ハナイ。然シソノ n 葉近傍=ハ高々 $(n+1)\pi$ ノ筒狀部分=描寫サレル。

$\mathfrak{p} = \infty$ が分岐点デナイトキハ $n=1$ トシテ上ノコトガ云ヘテ居ル。兩者トモ θ が十分大キケレバ此ノ筒ノ $\triangle BAC =$ スル切口ハ $\Gamma(\theta) =$ 無關係デアル。

一般=レッツノ (g) -Vector $\overrightarrow{bd}$ ノ描寫ハ BAC トニツノ交点ヲモツ $\mathfrak{p}$ が代数分岐点デアレバ θ が十分大キケレバニツ共 $\Gamma(\theta) =$ 關係ガナクナル。($d = \infty$ デ d が對数分岐点デアレバ右側ノレッツノ交点ハ $d =$ 附屬サレテ左ダケ考ヘレバヨイ)。

$\mathfrak{p}$ ノスベテノ (g) -Vectors ガ $\Gamma(\theta) =$ 關係ガナクナル θ ガ考ヘラレル。此ノトキ $\mathfrak{p}$ ハ θ デ無数ト呼バテ。

$\mu_1(t)$ ヲ對数分岐点ノ $I(y) = t =$ 横ハル (g) -Vector 描寫ノ數 ($w = \infty$ が對数分岐点ノトキ w 數ヘ入レル) トシ、 $\mu_2(\theta, t)$ ヲ θ デ有效ナル代数分岐点ノ $I(y) = t =$ 横ハル (g) -Vector ノ數トスル。

$$L(\theta) \leq 2\sqrt{2} \int_0^\theta (\mu_1(t) + \mu_2(\theta, t)) dt$$

定理 II. 積分 $\int_{\theta_0}^\infty \frac{dt}{\int_0^\theta (\mu_1(t) + \mu_2(\theta, t)) dt}$

が発散スレバ F は拋物的デアル。

線状ノ網 Γ = 於テ $\mu_1(t)$ ハ原点 t 。カラ 角距離 t = アル 對數範圍ノ 境界点ノ 数 (之ノ 境スル 對數範圍 = 從ツテ 数ヘタ) $\mu_2(\theta, t)$ ハ θ デ 有效ナル 代數範圍ノ t 。カラ t = アル 境界点ノ 数デアル。從ツテ 積分ハ 夫々 = 對應スル 境界弧 即チ 網ノ 線ノ 長サ = ナル。

§ 4. 代數分岐点ノ 有效區間ト 存在區間トノ 差ガ 有限ガアレバ、上ノ 定理ハ 網ガ ケ = 着目シテ 云ヒ 換ヘラレル。例ヘバ、有限個ノ w ノ 上 = ノ ミ 分岐点ガ アルト キヲ 考ヘル。

$$a_\nu = e^{\frac{2(\nu-1)\pi i}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

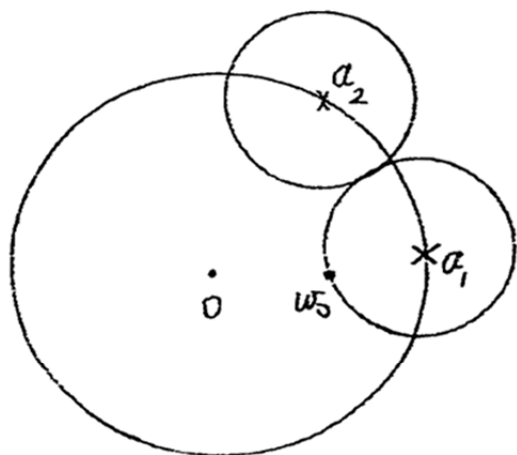
吾々ノ 線状網ハ *Elfvig* ノ 線状複体ト一致スル、何トナレバ上ノ 議論ハ 正則点ヲ 假リノ 特異点トシテ 数ヘ入レルコトハ 差支ヘナイ カラ。

$|w| < 1$ ノ 一ツヲ *Original (g)-disc* D_0 トスル。面 F ヲ

$$|w - a_\nu| = \sin \frac{\pi}{n}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

ヲ 切ルト

1. $|w| > 1$; $|w - a_\nu| > \sin \frac{\pi}{n}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$
 の上 = 單葉面分, 系列ヲ得ル。此ノ任意, Γ 上ノ描寫ハ



$$R(y) > \log \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)$$

$$(k-1)\pi < I(y) < (k+1)\pi$$

= 收マル。此ノ円板 $|w| > 1$, D_0 カラノ角距離ガ $k\pi$ トスル。

何若 a_ν カラ $|w| = 1$ = 立テ
 又垂線ハ何レモ $k\pi$ ノ角距離

= アルカラデアアル。 $\theta \geq (k+1)\pi$ デ此ノ領域ハ無効=ナル。
 ($y_0 = \log \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)$ トスル)

$$2. |w| < 1, |w - a_\nu| > \sin \frac{\pi}{n}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

= 單葉範圍ヲ得ル。 Γ 上ノ描寫ハ

$$R(y) > \log \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)$$

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < I(y) < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

= アル。 $k\pi$ ハコノ $|w| < 1$ ノ D_0 カラノ角距離トスル。
 故 = $\theta \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ デ此ノ領域ハ無効=ナル。

$$3. |w - a_\nu| < \sin \frac{\pi}{n} \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

= 單葉、有限葉又ハ無限葉ノ單一連結ノ領域ヲ得ル。前二者
 ノ場合 Γ 上ノ描寫ハ

$$R(y) < \log\left(\sin \frac{\pi}{n}\right)$$

$$(k_2-1)\pi \leq I(y) \leq (k_1+1)\pi$$

= 落ちル。 $k_1\pi$ 及び $k_2\pi$ ハ夫々 (g) -discs $|w| \leq 1$ ノ此ノ領域ニ関係アルモノ、 D_0 カラノ角距離ノ最大値ト最小値ヲアル。

以上ヲ綜合シテ T ノ一ツノ代数範圍ノ角点ノ t_0 カラノ最大角距離 (t_0 ハ D_0 ノ像) が $k_1\pi$ ナラベ此ノ範圍ハ $(k_1+1)\pi$ ナラ無効ニナル。

T_m ヲ t_0 カラ $m\pi$ ニアル T ノ部分トシテ T_m = 含まレル $\sigma_1(m)$ ヲ對數範圍ヲ限ル項 (二ツノ角点ヲ結ガ長サ π ノ單位線分) ノ數 (之ガ限ル對數範圍ノ數 = 縦ツテ數ヘル。以下同意) トスレバ

$$(m-1)\pi \leq t \leq m\pi \quad \text{ナ}$$

$$\int_0^\theta \mu_1(t) dt \leq \pi \sigma_1(m)$$

T_m = 含まレ T_{m-2} ナ關デナイ代数範圍 (二辺形ニ含まレテ) ヲ限ル T_m ノ項ノ數ヲ $\sigma_2(m)$ トスルト

$$(m-1)\pi \leq \theta \leq m\pi \quad \text{ナ}$$

$$\int_0^\theta \mu_2(\theta, t) dt \leq \pi \sigma_2(m)$$

ナアルカラ

定理 III. 級數
$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sigma_1(m) + \sigma_2(m)}$$

が幾何スレバ F ハ拋物的デアル。

二重週期函数 $p(z) = w$ ノ作ルリーマン面ハ此ノ條件ヲ満足スル。

§5. F が有限個ノ点

$$w = a_1, a_2, \dots, a_\nu$$

デノミ分岐スル場合ニハ、一次変換ト角谷サンノ部分的ナ *Pseudo-regular function* ヲ w -平面ニ用ヒテ a_ν ヲ §4 ノ基本点ニ移ス。 $F \rightarrow F'$ トナルトキ適當ナ *Pseudo-regular* 函数¹⁾ ノ選ビ方ニ對シテ F ト F' ノ型ハ同一ニナル。 F = 葉スル線狀複体 (*Elfvig*) ハ F' ノ線束網ト一致スル故ニ此ノ場合ニモ複体ニ對シテ定理 III が云ハレル。

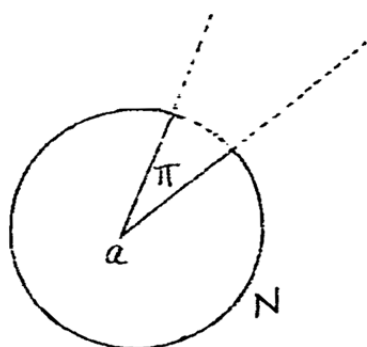
面分ノ個々ニ角谷サンノ方法ヲ適用スレバ、分岐点ノ座標ニツイテハ、モウシ自由が與ヘラレルデアラウ。

註) 角谷氏本紙 49 号 173 *Pseudo-regular function* ノ應用。又 *Z. Kobayashi, On the type of Riemann surface Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku Sec. A. No. 42 (1935)* ノ方法ト結果が同時ニ改良サレタコトニナル。

尚、*Wittich* が之レト同一ト思ヘル定理ヲ出シタコトが *E. Ulbrich, Flächenkon und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen, Jahresbericht d. D. M. V. Bd. 46, (1936)* ニ述べテアル。証明ハ出テ居ナイ。

§6. Ahlfors の場合ヲ考へル²⁾。即ち $|w| < \infty$ = ハ代
数分岐点ノミ起ル F ヲ取ル。 F 上有限 $= W_0$ ヲトリ w_0 。カラ
面上ノ ユークリッド距離ノ最小ガ d 以内ナル点ノ集合ヲ $Q(d)$
トスル。 $Q(d)$ ノ境界ノ中 w_0 ヲ F ノ 開放的ナ部分ト分ツ
ツノ曲線ヲ $\Gamma(d)$ トシ、ソノ ユークリッドノ長サヲ $L(d)$ ト
スル。

Ahlfors ノ定理ハ 積分 $\int \frac{dt}{L(t)}$ が 発散スレバ F ハ
拋物的デアールト擴張サレル。



サテ $W = \infty$ 上ノ 一ツノ 正則又ハ代
数分岐点ヲ考へル。十分大ナル円ノ
外 = 此ノ $W = \infty$ ノ 正則ナル近傍 N
ガトレル。

今一ツノ 分岐点 $a \neq \infty$ ヲ頂点ト
スル 單葉角範圃 π ガ N ト 共通部分ヲ持ツトスル。 N ノ 周
ノ長サヲ ε , a ト N ノ 周トノ 最小距離ヲ δ トスレバ $N \dot{+} \pi$
上 a カラ $\delta + \varepsilon$ 以下 ナイ距離 = アル点ノ 集リハ $N \dot{+} \pi$
内ヲ閉ナル。 故ニ a ノ w_0 カラノ 最小距離ヲ d トスレバ
 $Q(p)$ ノ 境界ハ $p > d + \delta + \varepsilon$ デ $N \dot{+} \pi$ 内ヲ閉ナル。
故ニ π ハ カナル p ガ $\Gamma(p) = \emptyset$ シテ 無効デアル。

今代數分岐点 a ヲ頂点トスル ∞ 迄延ビルスベテノ 單

註) L. Ahlfors, Zur Bestimmung des Typus einer
Riemannschen Fläche. Comment. Math. Helv.,
3 (1931)

某角範囲ニツイテ考ヘルト、十分大ナル ρ デ皆無効ニナル
コトガアル、此ノトキ α ハ ρ デ無効デアルト云ハフ。

ρ デ有効ナル且ツ w_0 カラ ϵ 以内ニアル代数分岐点ノ
数ヲソノ次数ニ從ツテ數ヘテ $n(t, \rho)$ トスル。

$$L(\rho) \leq 2\pi \int_0^\rho u(t, \rho) dt$$

故ニ Ahlfors ノ定理ノ條件ハ積分

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\int_0^\rho u(t, \rho) dt}$$

ノ発散ニナル。

サテ、スベテノ代数分岐点ニツイテ w_0 カラノ距離ト無
効ニナル最小値 ρ ノ差ガ有界ナラバ、例ヘバ ϵ ヨリ小
サイトスレバ Ahlfors 氏³⁾ ノ球面上デ得タ定理(角谷サン
ノ一昨²⁾年得タレタ)ガ同論文ニ於テ 4π ノ代リニ ϵ ヲ置キ換
ヘテ得ラレル。

定理 IV. F ノスベテノ代数分岐点ノ $\Gamma(\alpha) =$ 對スル有
効區間ガ有界ナラバ

$$\sum_1^\infty \frac{i}{n(i)}$$

ノ発散ガ F ガ拋物的ナルタメノ十分條件デアル。茲ニ $n(i)$
ハ次数ニ從ツテ數ヘタ w_0 カラ i 以内ニアル代数分岐点ノ

註3) L. Ahlfors. Über eine Klasse von Riemannschen
Flächen. Soc. Sci. Fermica Comm.

Phy.-Math. IX, (1936)

数デアル。

例へバ境界点ヲ持タナイ F ノ代数分岐点ノ座標ノ集合が有界デアレバ、上ノ條件ヲ満足スル。例へバ $|w| < K' = \text{入}$
ルナラバ

$$h = 2(\pi + 1) h'$$

トナル。