



Title	準單純りい群ニ関スル一定理
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 133, p. 267-272
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74515
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

590. 準単純リー群に関する一定理

吉田 耕 作 (阪大)

§1. 複素数体ノ上ノ n 次行列ノ集合 $\overline{\mathcal{G}}$ が Lie-ring
 デアルトスル。即チ

$$1^\circ \quad X, Y \in \overline{\mathcal{G}} \text{ トラバ } \alpha X + \beta Y \in \overline{\mathcal{G}} \quad (\alpha, \beta \text{ ハ実数})$$

$$2^\circ \quad X, Y \text{ ト共 } [X, Y] = XY - YX \in \overline{\mathcal{G}}.$$

今コノ ring (加法ハ行列加法, 乗法ハ $[X, Y]$) ノ base
 (実係数デノ) $X_1, X_2, \dots, X_m$ トスル。

$$\exp. \left(\sum_{i=1}^m t_i X_i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^m t_i X_i \right)^k}{k!}$$

$$(t \text{ real 且 } \sum_{i=1}^m |t_i| < \varepsilon, \varepsilon > 0)$$

ナル形ノ行列ノ全体 $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ トスルバ, Lie ノ第二基本定理ノ
 逆 $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ ハ Lie 群芽デアル。即チ $X, Y \in \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ が充分

単位行列 E = 近ケレバ (行列) *topologie* ハ絶体値

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|} = |A|, A = \|a_{ij}\| = \text{ヨツテ定義スル}) X^T \in$$

$XY \in \overline{\mathcal{O}_f} = \text{属スル。}$

惜テ $\mathcal{O}_f$ ヲ以テ $\overline{\mathcal{O}_f}$ カラ *erzeugen* サレタ行列ノ群
($\overline{\mathcal{O}_f}$ ノ行列有限個ノ積及ビ新カル積ノ極限ヲ其ノ *deter-*
minant $\neq 0$ ナルモノノ全体ノ作ル群) ハ明ニ *local com-*
pact ナカラ *Lie* 群ヲ作ル (本紙談話 337). $\mathcal{O}_f$ ノ
Lie-ring $\mathcal{T}$ ハ定義ニヨツテ $\lim_{i \rightarrow \infty} ((A_i - E)/\varepsilon_i)$
($A_i (\neq E) \in \mathcal{O}_f$, $\varepsilon_i \neq 0$ real 且ツ $A_i \rightarrow E$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$) ノ
如キ極限行列ノ全体ナラバ $\mathcal{T} \cong \overline{\mathcal{T}}$.

先ニ (本紙談話) = 於テ例ヲ以テ 一般ニ $\mathcal{T} \neq \overline{\mathcal{T}}$
ナルコトヲ示シ、且ツ $\overline{\mathcal{T}}$ ガ *irreducible* ナラバ $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{T}}$
ナルコトヲ証シタ。

コトニハ $\overline{\mathcal{T}}$ ガ 準單純 ナラバ矢張り $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{T}}$ ノ成立スル
コトヲ示シタイ。

$\overline{\mathcal{T}}$ ガ 準單純ト云フノハ $\overline{\mathcal{T}}$ ガ *nilpotent* ナ *Ideal*
ヲ含マナイコトナリ、準單純ナ *Lie-ring* $\overline{\mathcal{T}}$ ニ關シテ
吾々ハ次ノニツノ基本定理ヲ有スル。

(i) $\overline{\mathcal{T}}$ ハ 準單純ニシテ且ツ單純ナ *Ideal* ノ直和ニナ
ル (E. Cartan, *Thèses*, p. 53)

(ii) $\overline{\mathcal{T}}$ ハ 完全可約ナル。即チ $\overline{\mathcal{T}}$ ノ 全ベテノ
matrix X ハ

$$X = \begin{vmatrix} X^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & X^{(n)} \end{vmatrix}$$

ノ形デアルト考ヘテ差支ヘナイ。(斯ルモノ = 相似 — *ähnlich*)。コノ X が $\overline{J}$ ヲ動クトキ $X^{(i)}$ ハ $\overline{J}$ = 準同型ナリ、從ツテ準單純ナリ、Lie-ring $J^{(i)}$ ヲ作り且ツ $J^{(i)}$ ハ既約デアアル。即チ $J^{(i)}$ ノ行列ハ全テ同時ニハ

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ X & B \end{vmatrix}$$

ノ形ノ行列 = 相似 (*ähnlich*) = ハナラナイ (H. Weyl, *Math. Zeitschr.* 24, p. 381)

§2. サテ上ノ proposition ヲ証明スルタメニツ
1) Lemma ヲ要スル。

Lemma 1. $\overline{J}$ ハ J ノ Ideal デアル (証明ハ談話
571 ト同様)

Lemma 2. J ノ行列 Y が $\overline{J}$ ノ各行列ト可換ナラ
バ $Y = 0$

証明. $J^{(i)}$ ハ準單純 (上ノ (ii) ラミヨ) デカラ $J^{(i)}$
ノドノ行列ノ Spur (固有値ノ和) ハ 0 ニナル。何者、準單純
ト云フコトカラ (i) = ヨル) $J^{(i)}$ ノドノ行列モ $J^{(i)}$ カラ
適當ニエラ ンダニツノ行列 $X^{(i)}, Y^{(i)}$ ヲ以テ $[X^{(i)}, Y^{(i)}]$ ノ
形ニ表ハサレネバナラスコトガ分ルカラ。

故ニ行列ニ關スル公式 $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Spur}(A))$

$= \exists \lambda \ Y \in \mathcal{J} \wedge$

$$\left\| \begin{array}{ccc} Y^{(1)} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & Y^{(2)} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & Y^{(n)} \end{array} \right\|, \quad \text{Spur}(Y^{(i)}) = 0$$

ノ形デナケレバナラヌコトガワカル。ココ $= Y^{(i)}$ ト $X^{(i)}$ ト Grad ヲ同シクスル。

假定 $= \exists \lambda \ Y^{(i)} \wedge \mathcal{J}^{(i)}$ ヲ其ノ Lie-ring トスル Lie 群 $\mathcal{O}^{(i)}$ ト可換デアルガ、 $\mathcal{O}^{(i)} \wedge \mathcal{J}^{(i)}$ ト共ニ既約デカラ、 $\text{Schur's Lemma} = \exists \lambda \ Y^{(i)} = \lambda E^{(i)}$ ($E^{(i)}$ $\wedge Y^{(i)}$ ト同シ Grad ノ単位行列)。故ニ $\text{Spur}(Y^{(i)}) = 0$ カラ $Y^{(i)} = 0$ 。即チ $Y = 0$ 以上、

§3. 証明。 $\overline{\mathcal{J}} \neq \mathcal{J}$ トシテ矛盾ヲ出ス。 $\overline{\mathcal{J}}$ 及ビ $\mathcal{J}$ ノ Base ヲ各々 $(X_1, \dots, X_m), (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_r)$ トスル。 $Y_1, \dots, Y_r$ ノ任意ノ一ツヲ Y トスル。然ラバ $\overline{\mathcal{J}}$ カ $\mathcal{J}$ ノ Ideal ト云フコトカラ $\mathcal{J}_1 = (X_1, \dots, X_m, Y)$ ガ Lie-ring デアリ $\overline{\mathcal{J}} \wedge \mathcal{J}_1$ ノ $\text{Ideal} = +$ ナル。 $\mathcal{J}_1$ $\wedge$ 準單純デナイ。何者、若シ然ラズトスレバ (i) $= \exists \lambda \ \overline{\mathcal{J}}$ ガ $\mathcal{J}_1$ ノ直和項 $= +$ リ従ツテ $Y' \equiv Y \pmod{\overline{\mathcal{J}}}$ ノ形ノ $\mathcal{J}$ ノ行列 Y' ガ $\overline{\mathcal{J}}$ ノ各行列ト可換デナケレバナラナイ。之レハ $\text{Lemma 2} = \exists \lambda \ Y' = 0$ 、即チ $Y \in \overline{\mathcal{J}}$ ヲ意味スルカラ矛盾デアル。

ナテ $\mathcal{J}_1$ ガ準單純デナイカラ $\mathcal{J}_1 \wedge \text{nilpotent}$ ナ $\text{Ideal } \mathcal{R}_1$ ヲモツ。 $\mathcal{R}_1$ $\wedge$ 準單純ナ $\overline{\mathcal{J}}$ ノ Ideal デア

|| 得ナイカラ適當 = base ヲカヘレバ $R_1 = (X_{l+1}, \dots, X_m, Y')$, $Y' \equiv Y \pmod{\overline{J}}$, $\overline{J} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, $\overline{J}_1 = (X_1, \dots, X_m, Y') = (X_1, \dots, X_m, Y)$ ト假定シテ差支ヘナイ。

若シ $l+1 \leq m$ ナラバ, $\overline{J}_1 = (X_{l+1}, \dots, X_m) \neq 0$ ガ $\overline{J}$ ノ Ideal ナアル。 ($\overline{J}_1, R_1$ ガ $\overline{J}$ ノ ideal ナカラ)。 $\overline{J}_1$ ハ $\overline{J}$ ト共 = nilpotent ナカラ $\overline{J}$ ノ準單純性ト $\overline{J}_1 \neq 0$ トハ反スル。ヨツテ $l+1 > m$ 即チ $R_1 = (Y')$ デナケレバナラナイ。

然ラバ, $R_1, \overline{J}$ ガ $\overline{J}_1$ ノ ideal ナカラ, 任意ノ $X \in \overline{J} = \overline{J}_1$ 對シテ

$$[X, Y'] \in (R_1 \cap \overline{J} \cap \text{Durchschnitt})$$

トナラナケレバナラナイ。即チ $[X, Y'] = 0$ 。ヨツテ Lemma 2 = ヨリ $Y' = 0$ 。之レハ $Y \in \overline{J}$ ナ意味スルカラ, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ガ $\overline{J}$ ト一次独立ト云フコト = 反スル。

故ニ $\overline{J} = \overline{J}_1$ デナケレバナラナイ。

以上

§ 4. 應用. 連結シタ準單純 Lie 群 $\mathfrak{g}_1$ ノ行列 = ヨル連続表現 $\mathfrak{g}_2$ ヲ考ヘレバ, 連続字像 $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ハ実ハ Gebietstreue (開集合ノ像が開集合 = ナル) ナ寫像 = ナル。何者, コノ準同型寫像 $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ハ所謂 infinitesimal representation ヲ induce シ, コノトキ $\mathfrak{g}_1$ ノ Lie-ring = 對應スル Lie-ring ハ準單純トナルカラナアル。

同様ノ議論ハ (前談話 571) = ヨレバ $\mathfrak{g}_1$ ガ連結

Lie 群 $\mathfrak{O}_2$ が $\mathfrak{O}_1$ の連続な既約表現ノトキニモ出來ルヲ
ケデアル。

§5. 以上ハ、数物年會ニ御報告スル積リテ、先般阪大
數學教室ノ方々ニ談話會デ聽イテ頂イタ内容デアリマス。其
ノ後 Cartan ノ Thésés ヲ引繰リ返シテ居リマシタラ
113 頁ニ。

準單純ノ Lie-ring ノ各 Operator ト可換ノ Operator
Nuloperator デアル。

ト出テ居リマス。之レニヨレバ Lemma 2 ハ $\forall \in \mathfrak{J}$ ト
云フ假定ナシニ成立スル筈ニナリマスガ、 $\overline{\mathfrak{J}}$ トシテ Spur 0
ナル次行列ノ全体ヲトレバ明ニ準單純且ツ E ハ $\overline{\mathfrak{J}}$ ノ各行
列ト可換ニナリマスカラ、Cartan ノ結果ハ誤ッテアリマ
ス。昔流ノ大ザッパノ例ノ勘定法ガ誤ッテルノデセウ。之ニ
ツイテハ又何レ談話サセテ頂キタイト思ヒマス。