



Title	雑記 III
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 133, p. 272-276
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74516
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

591. 雜記 III

南 雲 道 夫 (阪大)

§ 函數空間 = 於ケル平易ナ一例

①^{*} 區間 $a \leq x \leq b$ = 於ケル連続函数 $f(x)$ [$f(x)$
ハ實數] ノ全体 カラ成ル集合 = 於イテ, ソノ各要素 $f(x) =$

Norm (絶対値ノ如キモノ) $|f|$ ヲ次ノ如ク定義シタルトキ
此ノ集合ヲ C デ表ハス。

$$|f| = \text{Max}_{a \leq x \leq b} [|f(x)|]$$

C = 於ケルニツノ要素 f_1, f_2 ノ距離ヲ

$$|f_1 - f_2| \leq \text{Max}_{a \leq x \leq b} [|f_1(x) - f_2(x)|]$$

トスルトキ, C ハ完全ノ距離空間 (Cauchy ノ収斂條件が成立スル) トナル。何トナレバ C ノ距離ノ意味ニ於ケル収斂ハ, $a \leq x \leq b$ = 於ケル一様収斂デアルカラ。

次ニ C = 於テハ, C 内デ至ル所密 = 分布セル可附
稱集合が含まレテキル。〔 C が separable デアルトイ
フ〕。

何トナレバ $a \leq x \leq b$ ヲル等分シ, ソノ各分点デ
有理数値ヲトルマウナ多角形函数〔相隣ル分点ノ間デ一
次函数トナル連続函数〕ノ全体がソレデアルカラ。

又 C ノ部分集合 M が C 内デ緊ツテキル〔 M ノ任
意ノ無限部分集合が C = 於ケル集積点(函数)ヲ有スルコ
ト〕為メハ, M が一様ニ有界且ツ同程度ニ連続ナルコトが
必要且ツ充分デアル (Ascoli-Arzelà ノ定理)。〔緊ツ

* (前頁) □ = 述べテアルコトハ充分御存知ノ方モ多イケレ
ドモ, 御存知デナイ方モアルト思ツテ, ワザワザ大要ヲ
説明シテオキマス。

テキルノ原語ハ compact デス]

C ハ函数空間ニ於ケル最も初等的ノ一例デアル。

[2] 次ニ C = 次イデ初等的ノ函数空間ノ一例ヲ述ベヨウ。

C ノ各函数ハ多角形函数ヲ近似 (一様収斂ノ意味ヲ) 出来タ。今度ハ 階段函数 ヲ一様ニ近似出来ルヤウナモノハ何デアラウカ?

階段函数トハ $a \leq x \leq b$ ノ有限個ノ區間ニ分ケ、ソノ各區間ニテ常数ニ等シイヤウナ函数ヲイフ。

特ニソノ各區間ガ左端ニ於テ閉カテキル (左端ヲ含ム) トキニハ、右ニ連続ナ階段函数トイヒ、各區間ガ右端ニ於テ閉カテキルトキニハ左ニ連続ナ階段函数トイフ。

1° 今 $a \leq x \leq b$ ノ各点 ξ ニ於テ

$$(1) \lim_{x \rightarrow \xi-0} f(x) = f(\xi-0), \quad \lim_{x \rightarrow \xi+0} f(x) = f(\xi+0)$$

兩方共有限確定デ且ツ

$$(2) f(\xi+0) = f(\xi)$$

ナル函数ノ全体ヲ D_+ トシ、(2) ノ代リニ

$$(2') f(\xi-0) = f(\xi)$$

ナル函数ノ全体ヲ D_- ナ表ハス。

D_+ 或ハ D_- ニ於テハ、ソノ各要素 (函数) $f(x)$ ノ $\text{norm} |f|$ ヲ

$$|f| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

= ヲツテ定義スル。 D_+, D_- = 於ケル収斂ハ一樣収斂ヲ意味スル。 D_+, D_- が完全ナ距離空間ナルコトハ容易ニ証明出來ル。

D_+ ハ右ニ連続ナ階段函数ニヨリ一樣ニ近似出來ル。又 D_- ハ左ニ連続ナ階段函数ニヨリ一樣ニ近似出來ル。(証明容易, Borel ノ被覆定理應用)。

2° 次ニ D 内ニ於ケル緊集合 M ノ條件ヲ考ヘヨウ。

今 $M = \{f(x)\}$ が $x = \xi$ ニ於テ右ニ同程度連続トハ、任意ノ正ノ數 ε ニ對シ

$$\xi < x, x' < \xi + \delta(\varepsilon)$$

ナラバ常ニ

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

トナルヤウナ正ノ數 $\delta(\varepsilon)$ が存在スルコトヲイフ。(左ニ同程度連続モ同様ニ定義サレル)($x \neq \xi, x' \neq \xi$ = 注目アレ、又 $\delta(\varepsilon)$ ハ ε ニ關係スル)

$$D_+ \supset M \quad (D_- \supset M \text{ ノ時モ同ジ})$$

が D_+ 内ニ緊ツテキルタメニハ、次ノコトが必要且ツ充分ナル。

$$(i) \quad M \text{ が一樣ニ有界 } [M \text{ 全体ヲ } |f(x)| \leq M]$$

$$(ii) \quad a \leq x \leq b \text{ ノ各点 } \xi \text{ ニ於テ, } M \text{ が右及ビ左ニ同程度連続ナル。}$$

必要ナルコトハ歸謬法ニヨル。充分ナルコトハ $\varepsilon_i \rightarrow 0$ (i 自然数) トシテ、各 ε_i ニツキ Borel ノ被覆定理ヲ應

用スレバ C の場合 (Ascoli の定理) と同様 = 証明出来ル。

尚 D_+ が *Separable* デナイコトハ

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < \xi \\ 1 & \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

が、考へテ見レバ合ル (ξ ハ非可附番個存在スル)

3° 尚 D = 於ケル *vollstetig* + *linear operator*
 $[D$ 内ノ有界集合 ($|f| \leq M$ ナル f ノ全体) $\cap D$ 内ノ緊
 集合 = 移スヲ *linear operator*] K f ハ次ノ性質
 ヲ有スル。

$\varepsilon > 0$ ヲ任意ノ正ノ数トスルトキ

$$|Kf - K_{\varepsilon}f| \leq \varepsilon |f|$$

$$[|f| = \text{上限 } |f(x)|]$$

デ、且ツ

$$K_{\varepsilon}f = \sum_{i=1}^n c_i(f) \alpha_i(x)$$

$\alpha_i \in D$, $c_i(f)$ ハ f ノ *linear fonctionell*
 ナルヲ $(n$ ハ有限ナル自然数) K_{ε} が存在スル。〔132号
 雑記 II 参照〕