



Title	談話582ニツイテ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 133, p. 277-283
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74517
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

592. 談話 582 = ツイテ

井 上 正 雄 (阪大)

本誌 131 号 = オケル清水教授ノ談話 582 = ツイテ簡單ナル注意ヲ述ベタイ。

1. $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ トオキ, $u(x, y)$, $v(x, y)$ が x, y = 関シテ無限回偏微分可能ナルトキ $f(z)$ ヲ單 = *polygenic function* ト呼¹⁾フ。

コノ函数ノ一点各 = オケル *parametric n-th derivative* $\frac{d^n f}{dz^n_{\theta(n)}}$ ヲ考ヘヨウ。

$\theta = \theta(n) \wedge \theta(n) = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$,
 $0 \leq \theta_i < 2\pi$ ナル n 次元空間 = オケル矩形 I^n ノ点デア
 ル。

定義 = ヨリ

$$\frac{d^n f}{dz^n_{\theta(n)}} = \prod_{j=1}^n (\bar{\partial} + \partial e^{-2i\theta_j}) f$$

$$\text{但シ } \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad \partial = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$\text{形式的} = \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad \partial f = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ト書ケバ}$$

1) 普通 *polygenic function* トハ E. Kasner = ヨリ u, v ノ連続ナ一次ノ偏微分係数が存在スルトキ = 使ハレタイルガ, 上述ノ假定ヲ満足スル函数ヲモ便宜上カク呼ブコトガアル。

$$\frac{d^n f}{dZ^n_{\theta(n)}} = \frac{\partial^n f}{\partial Z^n} + \frac{\partial^n f}{\partial Z^{n-1} \partial \bar{Z}} \sum_{j=1}^n e^{-2i\theta_j} + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial^n f}{\partial Z^{n-r} \partial \bar{Z}^r} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_r)}^{(1, 2, \dots, n)} e^{-2i \sum_{k=1}^r \theta_{j_k}} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial \bar{Z}^n} e^{-2i \sum_{j=1}^n \theta_j}$$

$$\theta(n) = \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \} = \text{イテ } \theta_1 = \theta_2 = \dots$$

$$\dots = \theta_n = \theta \text{ ナルトキ}$$

$$\frac{d^n f}{dZ^n_{\theta(n)}}$$

ノ値ハ $Z = \text{ヲケル所謂 rectilinear } n\text{-th derivative}$
 $\frac{d^n f}{dZ^n_{\theta}}$ トナルヲケデアル。

次ニ $\text{rectilinear } n\text{-th derivative } \frac{d^n f}{dZ^n_{\theta}}$ ガ θ
 = 無関係 = ナルトキ、之レヲ單ニ $f^{(n)}(Z)$ デ表ハシ、 $Z = \text{ヲ}$
 ケル f ノ微分ト云フ。

$$\text{コノ微分ノ定義ハ parametric derivative } \frac{d^n f}{dZ^n_{\theta(n)}}$$

ガ $\theta(n) = \text{無関係} = \text{ナルコトヲ定義シテモ全ク同一} = \text{ナル。}$
 何者、イザレノ場合ニシテモ微分ノ存在ト

$$\frac{\partial^n f}{\partial Z^{n-j} \partial \bar{Z}^j} = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

トガ同意義デアルカラデアル。

以上ノ準備ノ下ニ談話 582 = イテ $u(x, y), v(x, y)$
 = 關シテ述ベラレタ定理ノ條件ヲ次ノ如ク parametric
 derivative ヲ使ツテ述ベルコトガ出來ル。

Polygenic function $f(Z)$ カ一点 z_0 ノ近傍

テ解析函数ナルタメハ次ノ條件が必要且ツ充分
デアル。

1° $Z_0 = \tau$ 微分 $f^{(n)}(Z_0)$, $n=1, 2, \dots$, が存在
スル。

2° Z_0 ノ一ツノ附近傍 $\nabla(Z_0) = \tau$

$$\text{Max. Max.}_{Z \in \nabla(Z_0)} \left| \frac{d^n f}{dZ^n_{\theta(n)}} \right| = A_n$$

トオクトキ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} < +\infty$$

充分ナルコトハ條件 2° ノ談話 582 = 於ケル條件 = 導クコ
トが出来ルコトヨリ明カデアル。

$$\text{何者, } \theta(n) = \left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-j}, \underbrace{\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}}_j \right\}$$

トスルトキ,

$$\begin{aligned} A_n &\geq \left| \frac{d^n f}{dZ^n_{\theta(n)}} \right| = \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)^2 + \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right)^2} \\ &\geq \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right|, \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \end{aligned}$$

$$\text{但し } \begin{cases} x+iy \in \nabla(Z_0) \\ j=0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} < +\infty$$

ナル條件ヨリ適當 = 正數 K ヲ撰ンテ

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \leq K^n n! \quad \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \leq K^n n!$$

ナラシメ得ルカラデアル。

必要ナルコトモ全ク同様デアル。

2. *local* = 述べラレタ定理ヲ次ノ如ク *global* = 述べルコトモ出來ル。

Polygenic function $f(z)$ が領域 D = テ 解析函数ナルタメ = ハ、次ノ條件が必要且ツ充分デアル。

1° 点 $z_0 (\in D)$ = テ 微分 $f^n(z_0)$, $n = 1, 2, \dots$ が存在スル。

2° 任意ノ部分開領域 $\Delta (\subset D)$ = テ イテ

$$\text{Max.}_{z \in \Delta} \text{Max.}_{\theta(n) \in I^n} \left| \frac{d^n f}{dz^{\theta(n)}} \right| = A_n$$

トスルトキ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} = L(\Delta) < +\infty$$

完全ナルコト。

D 内 = 任意 = 一点 z ヲ取りタトス。トテ D = 含マレル *Jordanbogen* J ヲ結び、之ヲ完全 = 含ム開領域ヲ Δ トス。

シカルトキ L = 於ケル計算ヨリ正數 $K(\Delta)$ ヲ

$$\max_{z \in \Delta} \left| \frac{\partial^n U}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \leq K(\Delta)^n n!$$

$$\max_{z \in \Delta} \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \leq K(\Delta)^n n!$$

ナル如ク撰グコトが出来ル。

z_0 = 於イテハ I の定理が成立スルカラ z_0 の近傍 $U(z_0) = \tau f(z)$ ハ解析函数デアアル。 Δ の境界ト J トノ最短距離ヲ $\delta(>0)$ トシ

$$\min. \left(\frac{1}{2K(\Delta)}, \delta \right) = \rho(>0)$$

トスルトキ $U(z_0)$ ヲ z_0 ヲ中心トスル半径 ρ ノ円 C_0 = トルコトが出来ル。

C_0 = 含マレ且ツ J 上 = アル一点 z_1 ヲ $|z_0 - z_1| > \frac{\rho}{2}$ ナル如ク適當ニ撰ブ。シカラバ $z_1 = \tau f(z)$ ハ z_0 = 於ケルノト同一ノ條件ヲ満足シテキルカラ $f(z)$ ハ z_0 ヲ中心トスル半径 ρ ノ円 C ノ内デ解析函数デアアル。シカル = C_0 ト C_1 トノ共通部分デハ兩者一致スル故 $f(z)$ ハ $C_0 + C_1$ デ解析函数デアアル。之レヲ有限回繰返シテ z = マデ到達スルコトが出来ル、即チ $f(z)$ ハ z ノ近傍デ解析的デアアル。然ルニ z ハ任意ノ点デヨカッタラ、結局 $f(z)$ ハ D 全体デ一ツノ解析函数ナルコトが解ル。

必要ナルコト。

Δ ヲ任意ノ部分開領域トスレバ Δ 内ノ一点 z_0 = 於テハ z_0 ノ適當ナ開近傍 $V(z_0) = \tau$

$$\max_{z \in V(z_0)} \left| \frac{d^n f}{dz^n} \right| \leq \eta(z_0) K(z_0)^n n!$$

$$\eta(z_0), K(z_0) > 0$$

Δ へ開ナル故, Δ 内近傍ノ有限個 $V(z_i)$ ($i=1, \dots, N$)
 Δ ヲ被ヒ

$$\left. \begin{array}{l} \max_i \eta(z_i) = \eta \\ \max_i K(z_i) = K \end{array} \right\} \text{トスレバ}$$

$$A_n = \max_{z \in \Delta} \left| \frac{d^n f}{dz^n} \right| \leq \eta K^n n!$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} < +\infty$$

3. $u(x, y), v(x, y)$ ヲ (x, y) ノ実解析函
 数トスルトキ $\S 1$. = フケル定理ノ特別ノ場合トシテ次ノコ
 トガ云ヘル。

一点 z_0 デ $f(z)$ ノ微分 $f^n(z_0)$, $n=1, 2, \dots$,
 が存在スレバ $f(z)$ z_0 ノ近傍ヲ解析函数
 ナル。

シカシ, コレダケノ証明ナラバ *Quasi analytic*
function ノ理論ヲ使ハズトモ次ノ如キ方針ヲ証明出来
 マウ。

$z_0 = 0$ トシテ考ヘル。

假定スリ

$$u(x, y) = \sum_{m, n} a_{mn} x^m y^n$$

$$v(x, y) = \sum_{m, n} b_{mn} x^m y^n$$

$$f(z) = \sum_{m, n} (a_{mn} + i b_{mn}) x^m y^n$$

故に $z, \bar{z}$ を独立変数と看做す

$$f(z) = \sum_{m, n} c_{mn} z^m \bar{z}^n$$

ト $(z, \bar{z})$ の解析函数 = 展開出来る。

シカレ $f^n(0)$ の存在ハ

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^{n-j} \partial \bar{z}^j} \right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ナルコト = 外ナラヌ。

故に $f(z)$ の $(z, \bar{z})$ = 関スル展開ハ $\bar{z}$ の項ヲ含
ミ得ヌ。

即チ $f(z)$ ハ z の解析函数ナラン。