



Title	Kolmogoroff ノ 論文紹介, II
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 134, p. 1-11
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74519
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

594. Kolmogoroff / 論文紹介 II

小松 醇 郎 (阪大)

IV

① 前ノ代数複体群, ベッチ群等ノ元 (element) ハ任意ノ *bicompakt* ノ部分集合凡ベテヲ使ツテ定義サレル。然シ實際ニベッチ群ヲ取扱フ場合, 凡ベテノ部分集合ヲ考ヘル代リニ適當ノ條件ヲ充ス部分集合系ノミ考ヘル。是レ *systèmes fondamentaux*¹⁾ *S* デアル。一般ノベッチ群ガ此ノ上ノミデ考ヘタベッチ群ト同型ナルコトヲ証明スル。²⁾

-
- 1) Kolmogoroff; Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicomacts. *Compt. Rendus.* t. 202.
 - 2) 下ベッチ群ノ *reduction theorem* 即チ Kolmogoroff, *Second Théorème de Réduction* ハ是ヲケガハ不完全ガト思フ。上ベッチ群ニ関スル *Premier Théorème de Réduction* ト前ノ *dual* ノ関係トヲ使ヘバ完全ニナル。
Premier Théorème ヲ離レテ單獨ニ *Second Théorème de Réduction* ヲ完全ナルモノニ作り直スコトハ一寸難シサウデス。或ハ簡單ニ出来ルノカモ知レナイノデスが兎ニ角現在ハ試ミハ不成功ガシタ。又 *reduction theorem* ノ此処ノ証明ハモット適切ニ出来ルノカモ知レマセン。御教示アラバ幸デス。

空間 R ノーッ, décomposition Σ :

$$R = \Sigma B_\alpha,$$

$B_\alpha = B_\alpha$ 互ニ disjoint , α ハ有限又ハ無限個。

Σ が localement finie トハ

R ノ任意ノーッ, bicompact + 部分集合ハ B_α ノ有限個トシカ共有点ヲ持タナイ。

Système fondamental S トハ

1° localement finie + décomposition Σ ノ集合系。

2° Σ', Σ'' が S = 属スルニッノ décomposition トスレバ $\Sigma = \Sigma' \cdot \Sigma''$ ナル décomposition が又 S = 属スル。茲ニ Σ ハ, Σ' ノ Element $B'_{\alpha'}$ ノ中デ Σ'' ノーッノ element ト共通 + 部分ハ Σ , element = ハイル トスル。即チ

$$B'_{\alpha'} \cdot B''_{\alpha''}$$

ハ若シ Nullmenge デナイナラバ (任意ノ α', α'' = 對シテ) 是レハ Σ ノーッノ element ト考ヘル。

3° R ノ任意ノーッ, bicompact + Sous-ensemble A ノ任意ノ有限個¹⁾ ノ閉集合 $U_1, \dots, U_n$ デ被フトキ次ノ條件ヲ充ス décomposition Σ が S ノ中ニ¹⁾ ヲクモーッ存在ス。即チ Σ ノ任意ノ element デ A ト共有点ヲ持ツモノハ必ずどれカ U_i = 含マレル。

1) bicompact デカラ可能。

以上ヲ充タス S ハ一般ニハ *décompositions* ノ
abzählbar 以上ヲ含ム。

空間 R が *separabel* ナラバ *abzählbar* , Σ ヲ
 含ム S がトレル。¹⁾ 特ニ R が *Kompaktum* ナラバ
Alexandroff , *Unterteilung* = ヨル *Über-*
deckungsfolge ヲトレバ宜シイ。

一般ノ *localement bicomact* ナ R デ斯様ナ
 S が存在シ得ルカト云フコトハ例ヘバ *localement finie*
 ナ *décompositions* ノ凡マテノ $\lambda^S = \lambda$ レバ宜シ
 イ。²⁾

1) *Separabel* ナル故 *abzählbar* 個ノ *Umgebungssysteme*
 $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ がトレル。

$R = U_i + (R - U_i)$ ヲ Σ_i ナル *decomposition* トシ S ハ
 此ノ Σ_i カラ $\Sigma_i \Sigma_j$ ノ如ク作ラルルモノ全部ヲトル。
 適當ニ勘定スレバ *abzählbar*。

2) 然シ斯様ナ S デハベツチ群ノ取扱ヒテ簡單ニスルタメニ
 導入シタ *Systeme fondamental* が意味ヲナサ
 ナクナル。實際ニ簡單ナル S ヲ求メルコトが重要ナル。

⑤ Premier Théorème de Reduction.

S ヲ或ル *Systeme fondamental* トスル。 Z_0^{n-1} ヲ
 ノ上輪体トスレバ Z_0^n ト *homologue* ナ *cycle* y_0^n デ、

1) $Z_0^{n-1} - y_0^n$ が或ル $(n-1)$ 次元輪体 f^{n-1} , $R \text{ and } =$ ナ
 テ居ル。

ソ、Arguments アアル各点が S ノ中ノ一ツノ *décomposition* Σ , 夫々ノ *elements* ノ動ク間ハ $y_0^{\wedge}$, 値ハ Constant アアル様ナ $y_0^{\wedge}$ が存在スル。¹⁾

[証明] $S_{y_0^{\wedge}} = \{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ トスル。

M_i ノ *elements* = 含ム *décomposition* ハ S ノ中ニナイ。

一度 $y_0^{\wedge}$ ノ作ラズ = 順次 = $y_0'^{\wedge}, y_0''^{\wedge}, \dots$ ト作ツテ有限回ノ後 $y_0^{\wedge}$ ノ作ル。操作ト証明ハ各回同様アアルカラ $y_0'^{\wedge}$ ダケヲ作ル。

$\overline{M_0}$ bicomcompact, *Système fondamental* S ノ條件 $3^0 = \exists \cap \Sigma$ $\exists$ exist $\cap$, $\cap$, *elements* , 一部分 $B_1 + B_2 + \dots + B_\ell \supset M_0$. 且 $B_i \subset U_i$,

$$\text{且 } \forall \overline{M_0} \cdot \overline{M_j} = 0 \text{ ナラバ } \left(\sum_{i=1}^{\ell} U_i \right) \cdot \overline{M_j} = 0^{2)}$$

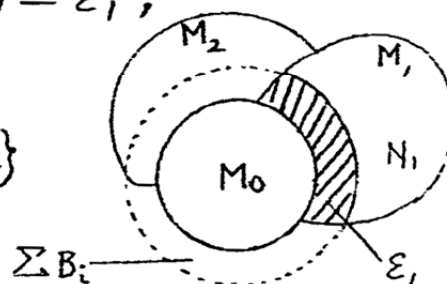
ナル如クトル。勿論 $\sum \overline{B_i} \cdot \overline{M_j} = 0$.

$$\overline{M_0} \cdot \overline{M_1} \neq 0 \text{ ナラバ } (\sum B_i) \cdot M_1 = \varepsilon_1 ;$$

$$M_1 - \varepsilon_1 = N_1 \text{ トスルバ}^{3)}$$

$$S_{y_0'^{\wedge}} = \{M_0 + \varepsilon_1, N_1, M_2, \dots, M_n\}$$

且 $\forall$



1) 即チ族体 $y_0^{\wedge}$ = 對 $\cap$ disjoint + bicomcompact + 有限個ノ集合系 $S_{y_0^{\wedge}}$ が對應スルが此ノ $S_{y_0^{\wedge}}$, sous-ensemble が凡テ Σ , element アアル。

2) Hausdorffscher Raum ナラバ可能。

3) $\varepsilon_1 = 0, N_1 = 0$ ナルコトアリ得ル。問題ハ簡單ニナル。

$$\begin{aligned} Z_0'^n(M_0 + \varepsilon_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_n}) \\ = Z_0^n(M_0, M_{i_1}, \dots, M_{i_n})^{1)} \end{aligned}$$

ト定メル。

$$\text{故} = f^n = Z_0^n - Z_0'^n \wedge$$

$$S_{f^n} = \{M_0, \varepsilon_1, N_1, M_2, \dots, M_n\},$$

$$\begin{aligned} f^n(\varepsilon_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_n}) &= Z_0^n(M_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_n}) \\ &\quad - Z_0'^n(M_0, M_{i_1}, \dots, M_{i_n}). \end{aligned}$$

今 $(n-1)$ 次元複体 f^{n-1} トシテ

$$S_{f^{n-1}} = \{M_0, \varepsilon_1, N_1, M_2, \dots, M_n\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f^{n-1}(\varepsilon_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}}) &= Z_0^n(M_0, M_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}}) \\ (\varepsilon_1 \neq \text{含マズトキ}) &= 0. \\ f^{n-1}(\varepsilon_1, N_1, \dots) &= 0 = Z_0^n(M_1, M_1, \dots) \end{aligned} \right.$$

ヲトレバ

$g_0 f^{n-1} \wedge$

$$(M_0, \varepsilon_1, N_1, M_2, \dots, M_{n-1}) = \sum (-1)^i f^{n-1} = 0$$

$$\begin{aligned} (M_0, \varepsilon_1, M_2, \dots, M_n) &= f^{n-1}(\varepsilon_1, M_2, \dots, M_n) \quad M_i \neq N_1. \\ &= Z_0^n(M_0, M_1, M_2, \dots, M_n) \end{aligned}$$

$$(\varepsilon_1, N_1, M_2, \dots, M_n) = -Z_0^n(M_0, M_1, M_2, \dots, M_n) \quad M_i \neq M_0.$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1, M_2, \dots, M_{n+1}) &= \sum_{i=2} (-1)^{i-1} f^{n-1}(\varepsilon_1, M_2, \dots, \hat{M}_i, \dots, M_{n+1}) \\ &\quad M_i \neq M_0, N_1. \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i-1} Z_0^n(M_0, M_1, M_2, \dots, \hat{M}_i, \dots, M_{n+1}) \end{aligned}$$

1) Menge 内ノ点ノ代リ = Menge デ点ノ位置ヲ表シタ。

$$(M_{i_0}, M_{i_1}, \dots, M_{i_n}) = 0. \quad M_{i_j} \neq \varepsilon_1.$$

以上何レノ場合ニ $g_0 f^{n-1} = f^n = Z_0^n - Z_0'^n.$

証明スベキハ $g_0 f^{n-1}(\varepsilon_1, M_2, \dots, M_{n+1})$ ノ場合。
 Z_0^n ハ Cycle.

$$\begin{aligned} \therefore g_0 Z_0^n(M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n+1}) \\ &= Z_0^n(M_1, M_2, \dots, M_{n+1}) - Z_0^n(M_0, M_2, \dots, M_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i Z_0^n(M_2, \dots, \hat{M}_i, \dots, M_{n+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g_0 f^{n-1}(\varepsilon_1, M_2, \dots, M_{n+1}) \\ &= Z_0^n(M_1, M_2, \dots, M_{n+1}) - Z_0^n(M_0, M_2, \dots, M_{n+1}) \\ &= f^n(\varepsilon_1, M_2, \dots, M_{n+1}) \end{aligned}$$

故ニ $Z_0'^n \wedge Z_0^n = \text{homologue} + \text{Cycle}.$

次ニ $(\sum B_i) \cdot M_2 = \varepsilon_2, M_2 - \varepsilon_2 = N_2$ トシ

$$S_{Z_0''} = \{M_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, N_1, N_2, M_3, \dots, M_n\}$$

ナル同様ニ Cycle $Z_0''^n$ ヲ作ル。

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{M}_j \neq 0 \text{ ナルニテ、} M_j \text{ 及ビ } R_n - \sum_{i=0}^n M_i = \text{ツキ}$$

同様ニ操作ヲ行ヒ Cycle

$$y_0'^n, S_{y_0'} = \{M_0', N_1, N_2, \dots, M_n, \dots, M_n\}$$

ヲ得ルニ M_0' ヲ element トスル $\sum$ が存在ス。残りノ
 ensemble $N, M = \text{ツキ}$ 同様ニ行ヒ結局

Z_0^n ト homologue ナ定理ヲ充タス Cycle $y_0'^n$ ヲ
 得。 以上

© Second Théorème de Reduction

$\mathcal{P}^n(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ — ツ, 下輪体 (cycle) トス。

Systeme fondamental S , décompositions

, éléments = +ル bicomact + sous-ensembles, $\ni (T(S) \text{ デ表ハス})$ フ考ヘルナラバ

$$\mathcal{P}^n(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = 0$$

然ラバ $\mathcal{P}^n$ ハ任意, sous-ensembles = 對シテ homologue zéro.

証明: décompositions, éléments = テハ $\mathcal{P}^n$ homologue à zéro¹⁾ ナラバ任意, sous-ensembles = テ homologue zéro フ証明ス。^{2) 3)}

- 1) 此ノ意味ハ décomposition, éléments, $\ni$ デ定義サレタ $(n+1)$ 次元複体 $\mathcal{P}^{n+1}$ が存在シソコナ

$$g_n \mathcal{P}^{n+1} = \mathcal{P}^n$$

- 2) 之レハ 勿論定理ノ結果ヲ含ム。

- 3) 此ノ定理ガ不完全ナルコトハ今 $T(S)$ ノミデ定義サレタ n 次元複体群 $\mathfrak{Z}^n(S)$, 輪体群 $\mathfrak{Z}^n(S)$, 境界群 $\mathcal{P}^r(S)$; 全体, bicomact + sous-ensembles デ定義サレタ夫々ノ群 $\mathfrak{Z}^n, \mathfrak{Z}^n, \mathcal{P}^r$ トスレバ

$$\mathfrak{Z}^n \xrightarrow{\text{homomorph auf}} \mathfrak{Z}^n(S)$$

對應ハ $\mathfrak{Z}^n$ ノ元ヲ, $T(S)$ ノミデ考ヘルバーツ, $\mathfrak{Z}^n(S)$ ノ元デアナル。ソレヲ對應。homomorph auf ナルコトハ $\mathfrak{Z}^n(S)$ ノ元ヨリ $T(S)$ デナイ ensembles = モ定義シテ行ケバヨイ。複体 $\mathcal{P}^n$ ノ條件ヲ充タスヤウ = 出来ル。

(脚註續+)

然シ此処デハコノコトハベツチ群如何ノ問題ニ関係シテ
来ナイ。

$$Z^n \xrightarrow{\quad} Z^n(S).$$

$$\Gamma^n \xrightarrow{\quad} \Gamma^n(S).$$

今 Z^n ノ中デ $T(S)$, zero element = 零 Cycle ,
群 O^n トスレバ定理ヨリ

$$\Gamma^n \supset O^n$$

$$\text{故} = Z^n - O^n \text{ isomorph in } Z^n(S)$$

$$\Gamma^n - O^n \text{ isomorph in } \Gamma^n(S)$$

故 = $B_u^n(R, \mathbb{H}) \wedge B_u^n(R, \mathbb{H}, S)$, Untergruppe =
isomorph = ナル. $T(S)$ ガケテ $B_u^n(R, \mathbb{H}, S)$ ヲ求メ
テモ $B_u^n(R, \mathbb{H}) = \text{isomorph}$ カトウカ分ラナイ. ソ
レヲ示スニハ $Z^n \rightarrow Z^n(S)$ カ全体ニ移ルト云フ re-
duction theorem が必要ナル. 此ノ証明が出来
カッタノデス。

是レハ Charakter ノ関係ヲ使ヘ、Premier réduction
théorème ヲ出ル。

$$Z_0^n \rightarrow Z_0^n(S) \text{ isomorph auf.}$$

$$H_0^n \rightarrow H_0^n(S) \text{ isomorph auf.}$$

$$\therefore B_0^n(R, T) \leftrightarrow B_0^n(R, J, S) \text{ isomorph auf.}$$

此ノ Charaktergroup ハ夫々 $B_u^n(R, \mathbb{H})$, $B_u^n(R, \mathbb{H}, S)$.

故 = isomorph ナル. 故 = Premier réduction théo-

rem to Charakter group トヲ使ッナラバ始メカラ
 Second Théorème de Réduction ハ不要ナル。

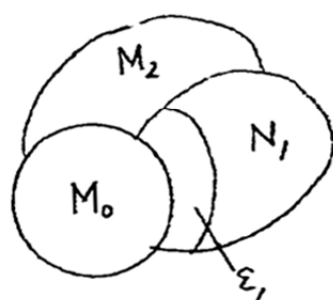
上輪体ノ場合ト同様ニ一ツ宛 Menge フ大キク又ハ小サクシ
 テ行ク。

$M_0, M_1, \dots, M_n$ bicomact, disjoint, $T(S)$,
 elements.

$$M_1 = N_1 + \varepsilon_1,$$

ε_1 , 従ッテ N_1 ハ

$T(S)$, elements 7^o ハナイト
 スル。



假定ヨリ

$$\varphi^r(M_0, M_1, \dots, M_n) = \varphi^{r+i}(G, M_0, \dots, M_n),$$

茲ニ $G \supset \overline{M_0} + \dots + \overline{M_n}$, 且ツ $T(S)$, elements.

φ^{r+i} ハ $T(S)$, elements ノミテ定義サレテ居ルガ
 故,

$$\varphi^r(M_0, \varepsilon_1, M_2, \dots, M_n) = \varphi^{r+i}(G, M_0, \varepsilon_1, M_2, \dots, M_n)$$

$$\varphi^r(M_0, N_1, M_2, \dots, M_n) = \varphi^{r+i}(G, M_0, N_1, M_2, \dots, M_n)$$

$$\varphi^r(\varepsilon_1, N_1, M_{i_2}, \dots, M_{i_n})$$

$$= \varphi^{r+i}(G', \varepsilon_1, N_1, M_{i_2}, \dots, M_{i_n})$$

ト定義スレバ φ^{r+i} ハ $T(S)$ 及ビ, ε_1, N_1 = テ定義サレタ函
 数. Additive ナルコトハ φ^r , Additive ヨリ出
 ル。

$$\varphi^r(M_0, \varepsilon_1, M_2, \dots, M_n) + \varphi^r(M_0, N_1, M_2, \dots, M_n) = \varphi^r(M_0, M_1, \dots, M_n)$$

$$\therefore \varphi^{n+1}(G, M_0, \varepsilon_1, \dots) + \varphi^{n+1}(G, M_0, N_1, \dots) \\ = \varphi^{n+1}(G, M_0, M_1, \dots).$$

又 ε_1, N_1 が $T(S)$, $M' \neq \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1$, $N'_1 + N''_1 = \text{必ずしも}$
 成らば

$$\varphi^n(\varepsilon'_1, M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_n}) = \varphi^{n+1}(G, \varepsilon'_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_n})$$

$$\varphi^n(\varepsilon''_1, M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_n}) = \varphi^{n+1}(G, \varepsilon''_1, M_{i_1}, \dots, M_{i_n})$$

であるが之を確か。斯様ニシテ ε_1 及び之レト $T(S)$ ノ凡
 エル *bicompact + ensembles* ト, *Durchschnitt*
 及び差ヲ作ラルル Menge $\Rightarrow \varphi^{n+1}$ ハ定義カレタ。

此ノ操作ヲ任意ノ *sous-ensemble* = 對シテ φ^{n+1}
 ヲ定義スレバ 結局 $\varphi^n = g_u \varphi^{n+1}$

以上.

V

定理 R が *kompaktum* ナラバ $B_u^n(R, \oplus)$ ハ
 通例ノ *Victoris* ノ意味ノ *Betti* 群 $B^n(R, \oplus)$ ト *iso-*
*morph.*¹⁾

証明 *Système fondamental* トシテ R ,
Unterteilungsfolge

$$S = \{ \Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots \}$$

$$(\Sigma_k) \quad R = B_1^k + \dots + B_{S_k}^k, \quad B_i^k \cdot B_j^k = 0 \quad (i \neq j)$$

B_i^k ノ 直徑ハ k ト 共 $= 0 = \text{tend}$ スル。

1) André Kolmogoroff; Les groupes de Betti des
 espaces métriques Ct. Rendus. t. 202.

$S = \text{對シ } \sum_i \bar{B}_i^k \supset R \text{ トシテ } \text{Nerv. 故} = \text{Projek-}$
 $\text{tionsspektrum } \Pi_S \text{ が出來ル。}$

一ツノ複体 $\mathcal{C}^n = \text{對シ } \Pi_S \text{ ナ複体, Folge } \{C_k^n\} \text{ が對}$
 應ス。

$\sum_k, \text{Nerv. } N_k \text{ ナ頂点 } (a_{i_0}, \dots, a_{i_n}) = \text{對シ}$

$$C_k^n(a_{i_0}, \dots, a_{i_n}) = \mathcal{C}^n(B_{i_0}^k, \dots, B_{i_n}^k)$$

此ノ對應ハ一對一。即チ $C_k^n = 0$ ナラ $\mathcal{C}^n$ zero 函数。

Operator g_u ノ關係ニ Umkehrbar. 即チ

$g_u C_k^n(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ ノ係數ハ凡ソモ 單體ニテ

$C_k^n(a_2, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ ノ係數ノ和。之レハ

丁度

$$\mathcal{C}^n(\sum_e B_e, B_{i_1}, \dots, B_{i_n}^k) = \mathcal{C}^n(G, B_{i_1}, \dots, B_{i_n}^k)$$

$$\text{cycle } \mathcal{C}^n \longleftrightarrow \text{cycle } \{C_k^n\}$$

$$\text{Rand } g_u \mathcal{C}^{n+1} \longleftrightarrow g_u \{C_k^{n+1}\}$$

$\therefore B_u^n(R, \oplus, S) \hookrightarrow B_u^n(R, \oplus, \Pi_S) \hookrightarrow \text{isomorph.}$

$B_u^n(R, \oplus, \Pi_S) \hookrightarrow B_u^n(R, \oplus) \hookrightarrow \text{isomorphie}$

ハ既ニ Alexandroff (Ann. of Math. 30) ノ結
 果ナアル。