



Title	函数論ノ一演習問題
Author(s)	早田, 文一
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 134, p. 12-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74520
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

595. 函數論ノ一演習問題

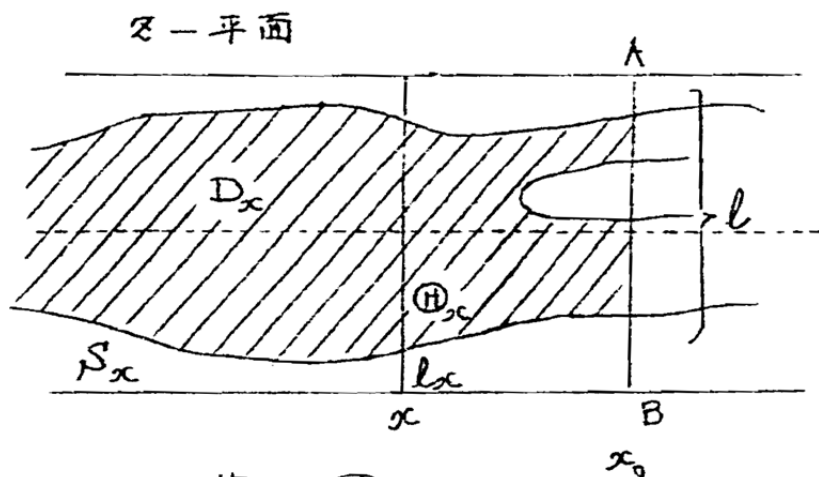
早 田 文 一

z 平面上ニアル Halbstreifen $S: -\infty < x < +\infty, -\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$ ($z = x + iy$) ノ内部ニアル任意ノ *schlichter Bereich* D トスル。

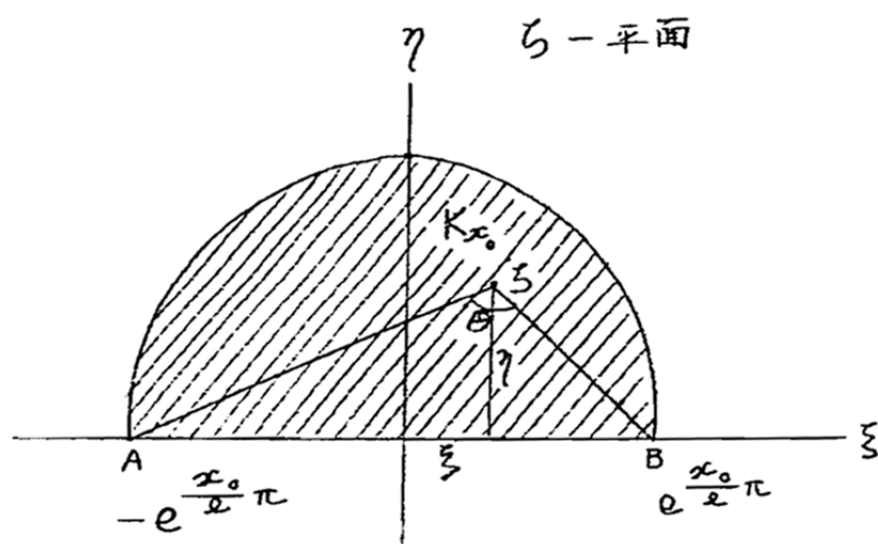
D y 軸ニ平行ナ直線 (座標 x) デ切ツタ トキ出來ル Querschnitt $\mathcal{H}_x$ トスル。 D ノ $\mathcal{H}_x$ ノ左側ニアル部分ヲ D_x デ示ス。 S ニ關シテモ同様ニ座標 x ナル Querschnitt $\mathcal{L}_x$ 。 ソレヨリ左ニアル部分ヲ S_x トスル。

今 $\mathcal{H}_{x_0}$ ノ上デ 1 , D_{x_0} ノ残りノ周辺デ 0 トナル調和函数 (*harmonisches Maß*) $\omega(z, \mathcal{H}_{x_0}, D_{x_0})$ ガアラハシヌ。 $\Omega(z, \mathcal{L}_{x_0}, S_{x_0})$ S_{x_0} ニ關シテ同様ナ意味ヲ有スル調和函数トスレバ *Prinzip der Gebietserweiterung* = ヲリ D_{x_0} 内ノ任意ノ点ニツキ次ノ不等式が成立スル。

$$(1) \quad \omega(z, \mathcal{H}_{x_0}, D_{x_0}) \leq \Omega(z, \mathcal{L}_{x_0}, S_{x_0})$$



第一圖



第二圖

先ヅ $\Omega(z, l x_0, S x_0)$ を求めんがタメ $\text{Halbstreifen } S x_0$ を次の変換 = ヨリ z 平面ノ上半面 = 位スル半円 = 一対一 = 寫像スル。

$$z = i e^{\frac{x}{2} \pi}$$

シカルトキハ Halbstreifen ノ右側ノ Berandung AB ハ半径 $e^{\frac{x_0}{2} \pi}$ ナル半円周 = ウツサレ、上、下ノ Berandung $A\infty, B\infty$ ハ夫々負軸、正軸 = 一致スル半径 = ウツサレル。 harmonisches Maß ハ一対一ノ等角寫像 = ヨリ変ラナイノデアルカラ $\text{Halbkreis } K x_0$ = ツキ Ω を求めル。 $K x_0$ 内 = 任意ノ一点 z をトリコレガ A, B = 對スル角ヲ θ トスレバ

$$\Omega = a\theta + b$$

円周上デ1, 直径上デ0デアル條件カラ a, b を求めテ

$$\Omega = \frac{2}{\pi} (\pi - \theta)$$

$z = \xi + i\eta$ トスレバ

$$\theta = \arctan \frac{e^{\frac{x_0}{e}\pi} - \xi}{\eta} + \arctan \frac{e^{\frac{x_0}{e}\pi} + \xi}{\eta}$$

デアルカラ簡單ナ三角法ノ計算ニヨリ

$$(2) \quad \Omega = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2\eta e^{\frac{x_0}{e}\pi}}{e^{\frac{x_0}{e}\pi} - \xi^2 - \eta^2}$$

$$z = \xi + i\eta = e^{\frac{x}{e}\pi} i \quad z = x + iy.$$

Ω ハ l_x ノ上デハ、 η ノ中点デ最大值ヲトルカラ $y=0$

即チ

$$\xi + i\eta = e^{\frac{x}{e}\pi} i, \quad \xi = 0, \quad \eta = e^{\frac{x}{e}\pi}$$

ヨツテ (2) ヨリ l_x 上ノ Ω ノ最大值トシテ次ノ値ヲ得ル。

$$(3) \quad \Omega = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2e^{\frac{x+x_0}{e}\pi}}{e^{\frac{x_0}{e}\pi} - e^{\frac{2x}{e}\pi}} = \frac{4}{\pi} \arctan e^{\frac{x-x_0}{e}\pi}$$

次ニ上ノ Ω ヲ用ヒテ Carleman ノ微分不等式ノ方法ヲ繰返シテ見ル。 $x < x_0 < x$ ナルトキ次ノ不等式が成立スル。

$$\omega(z, \oplus x_0, D x_0) \leq \omega(z, \oplus x_0, D x_0) \Omega(z_0, l_{x_0}, S x_0)$$

($R z_0 = x_0$, Ω ハ l_{x_0} 上ノ最大值トスル)

$\oplus x_0$ ノ上デハ右辺ノ第一因数ハ 1, 残りノ不等式ハ (1) =

ヨリ正シイ。又 $D x_0$ ノ残りノ Berandung デハ両辺

共 = 0 正シイ。ヨツテ内点 $z = x$ 上ノ不等式ハ成立スル。

(Maximumprinzip) コレヲ変形スルト

$$\omega(z, x_0) - \omega(z, x_0) < -\{1 - \Omega(z_0, x_0)\} \omega(z, x_0)$$

但シ、 $\omega(z, x_0)$, $\Omega(z_0, x_0)$ ハ夫々ノ略記号デアアル。

ヨツテ $x_0 \rightarrow x$ ナラシムレバ $x < x_0$ ナル任意ノ $x =$
對シテ

$$(4) \quad \frac{d\omega(z, x_0)}{dx_0} \leq -E\omega(z, x_0)$$

但シ

$$E = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{1 - \Omega(z_0, x_0)}{x_0 - x_0}$$

コノ $\Omega = (3)$ ノ値ヲ代入スレバ

$$E = \frac{2}{l}$$

故ニ、 $x < x_1 < x_2$ ナルトキ (4) ヲ x_1, x_2 間ニ積分スルコ
トヨリ

$$(5) \quad \omega(z, x_2) \leq \omega(z, x_1) e^{-\frac{2}{l}(x_2 - x_1)}$$

Carlemanノハルイ假定ノモトノ二次ノ不等式ヲ出シヌ。

$$\omega(z, x_2) \leq \omega(z, x_1) e^{-\frac{4}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_0}{\Omega(x_0)}}$$

今ノ場合ノ様ニ Dx_0 カ Sx_0 = 含まレルナラバ

$$\Omega(x_0) \leq l$$

デアアルカラ

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_0}{(H) x_0} \leq -\frac{x_2 - x_1}{l}$$

故 =

$$\omega(x, x_2) \leq \omega(x, x_1) + \frac{4}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{l}$$

$-2 < -\frac{4}{\pi}$ デアルカラ、コレヨリハ (5) ノ方ガ精確デアル。

然レコレハ Dx_0 ガ Sx_0 ニ近い図形ノトキニカギルノデアル。

實際 $(H)(x_0)$ ガアル x_0 デ非常ニ小ナルトキコノ前後ニ亘ル積分區間 (x_1, x_2) デハ

$$-\frac{4}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_0}{(H)(x_0)} < -\frac{2}{l} (x_2 - x_1)$$

トナルデアラウ。