OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Topologische Transformation ニ関シテ不変ナMetrik ニ就イテ
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 135, p. 29-37
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74524
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

599. Topologische Transformation ニ関シテ不変ナMetrik ニ就イテ

角谷　静夫（阪大）

近藤基吉氏ハ東北数学雑誌37巻383頁ニ於テーツノHausdorff空間Rト、RヲR全体ヘtopologische ニ変換スル変換ノ一群Gfガ與ヘラレタトキGf ニ属スル変換ノ一ニ関シテinvariant（isometrisch）ナMetrikヲRニ導入スルコトヲ試ミラレーツノ必要且ツ十分ナ條件ヲ得ラレタ。近藤氏ノ條件ハ非常ニ一般デ群GfガRニ於テtransitivデナイ場合ニモ成立スルモノデアリマスガ、始メヨリRがHausdorffノZweites Abzählbarkeits-axiom（2.A.）ヲ満足シテヰル場合シカ考ヘテヰナイノデソノ意味デ一般性ヲモツテヰナイ。

次ニハGfがRニ於テtransitiveデアルトキニハ2.A.ヲ假定セズニーツノ必要且ツ十分ナ條件が得ラレルコトヲ示サウ。

（erstes Abzählbarkeitsaxiom（1.A.）が必要ナコトハ明カデアル。又GfがRニ於イテtransitivデナイトキニハ1.A.ダケデ不十分ナコトハGfがEinheits-transformationノミヨリ成ル群デアル場合ヲ考ヘレバ明カデアル。コノトキハ單ニRのMetrisationが問題トナル）

定理。Hausdorff空間Rト、Rヲ全体ニtopolo-

gische = 変換スル変換ノ transitiv ナ群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキ、R = 任意ノ x, y ∈ R = 對シテ $\rho(\sigma x, \sigma y) = \rho(x, y)$ ナル如キ Metrik ヲ導入出來ルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハRガ 1. A. ヲ滿足シ、且ツR = 一点 x_0 ガ存在シテ、任意ノ x_0 ノ近傍 $U(x_0)$ = 對シテ x_0 ノ他ノ近傍 $V(x_0)$ ガ定マリ、任意ノ $\sigma \in \mathfrak{G}$ = 對シテ $V(x_0) \cdot \sigma V(x_0) \neq 0$ ナラバ $\sigma V(x_0) \subset U(x_0)$ トナルコトデアル。

注意：Rが topologische Gruppe デ $\mathfrak{G}$ ガソノ Gruppe ノ Element = ヨル変換デアルトキニハRが 1. A. ヲ滿足シテヰルコトノミガ條件トナリ、他ノ條件ハ常ニ滿足サレテヰル。

($x_0 = e$ ナルトキハ $U(e)$ = 対シテ $(V(e))^{-1} = V(e)$, $(V(e))^3 \subset U(e)$ ナル $V(e)$ ヲトレバヨイ。$x_0 \neq e$ デナイトキハ x_0^{-1} = ヨリ Einheit ノ近傍ニウツシテ考ヘレバヨイ)

ヨッテ定理ハ前ニ得テレタモノ（紙上談話會79号又ハ學士院記事 1936年, 4月）ト一致スル。

証明：必要ナコトハ明カデアルカラ十分ナコトヲ証明シヨウ。

Rが 1. A. ヲ滿足シテヰルカラ、x_0 ノ definiereudes Umgebungssystem $\{O_n(x_0)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ存在スル。先ヅ $V_1(x_0) = O_0(x_0)$ トオキ、$U(x_0) = V_1(x_0)$ = 對シテ定理ノ假定ヨリ定マル $V(x_0)$ ヲ

$\nabla_{\frac{1}{2}}(x_0)$ トオク。一般ニ $\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$ ガ定マッタトキ、$U(x_0)=\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\cdot O_{n-1}(x_0)$ ニ対シテ定理ノ仮定ヨリ定マル $\nabla(x_0)$ ヲ $\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ トオク。($n=2,3,4,\cdots\cdots$)。此ノ如ク $\left\{\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\right\}$ ($n=0,1,2,\cdots\cdots$) ヲ定義スレバ、コレハ次ノ性質ヲモッテキル。

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

ナラバ

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)+\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\cdots\cdots(1)$$

何トナレバ $\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$ ヨリ

$$\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\sigma^{-1}\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

ヨッテ $\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ ノ作リ方ヨリ

$$\sigma^{-1}\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\quad\text{又ハ}$$

$$\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

ヲ得ル。

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

ハ明カデアル。

今任意ノ R ノ集合 M ニ対シテ $U(M,\frac{1}{2^n})$ ヲモッテ $M\cdot\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$ トナルアラユル $\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ ($\sigma\in\Omega$, 但シ n ハ一定) ノ和ヲ表ハセバ $U(M,\frac{1}{2^n})$ ハ M ヲソノ内部ニ含ム開集合デアル。且ツ

$$U\left(U\left(M,\frac{1}{2^n}\right),\frac{1}{2^n}\right)\subset U\left(M,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

が成立スル。何トナレバ x ヲ $U\left(U\left(M,\frac{1}{2^n}\right),\frac{1}{2^n}\right)$ ノ任意ノ点トスレバ $\sigma\in\mathfrak{o}$ が存在シテ $x\in\sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$,

$U\left(M\cdot\frac{1}{2^n}\right)\cdot\sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$

後者ヨリ $\tau\in\mathfrak{o}$ が存在シテ

$$M\cdot\tau V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0,\quad \tau V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

更ニコノ後者ト(1)トヨリ

$$\tau V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)+\sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\tau V_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

即チ $x\in\tau V_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$ ニテ且ツ $M\cdot\tau V_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\neq 0$

ヨッテ $x\in U\left(M,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$. x ハ $U\left(U\left(M,\frac{1}{2^n}\right),\frac{1}{2^n}\right)$ ノ任意ノ点デアッタカラ

$$U\left(U\left(M,\frac{1}{2^n}\right),\frac{1}{2^n}\right)\subset U\left(M,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ヲ得ル。

今 $\left\{V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\right\}$ ヨリ $V_{\frac{2k+1}{2^n}}(x_0)$ ヲ

$$V_{\frac{2k+1}{2^n}}(x_0)=U\left(V_{\frac{k}{2^{n-1}}}(x_0),\frac{1}{2^n}\right)$$

ニヨッテ定義スレバ（n ニ對スル帰納法ニヨリ定義スル。$k=1,2,\cdots\cdots,2^{n-1}-1$; $n=2,3,\cdots\cdots$）此ノ如ク定義サレタ $V_r(x_0)$ （r: diadisch, $0<r\leqq 1$）ハ $r<r'$ ナルトキ $V_r(x_0)\subset V_{r'}(x_0)$ デ且ツ

$$U\left(V_{\frac{k}{2^n}}(x_0),\frac{1}{2^n}\right)\subset V_{\frac{k+1}{2^n}}(x_0)$$

ヲ満足スル。

$(k=1,2,\cdots\cdots,2^n-1;\ n=1,2,\cdots\cdots)$ コレハ k ガ gerade ナルトキハ $\nabla_{\frac{k+1}{2^n}}(x_0)$ ノ定義ヨリ直チニ分リ k ガ ungerade ナルトキハ n ニ関スル帰納法ト

$$U\left(U\left(M,\frac{1}{2^n}\right),\frac{1}{2^n}\right)\subset U\left(M,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ナルコトトヨリ容易ニワカル。

コノ $\nabla_r(x_0)$ (r: diadisch; $0<r\leqq 1$) ヨリ $f(x)$ ヲ

$$f(x)=\underset{r:\text{diadisch}\cdot 0<r\leqq 1}{\text{obere Grenze}}\ \left[x\in\overline{\nabla}_r(x_0)\right]$$

ニヨリ定義スル。 特ニ $x\in\overline{\nabla}_1(x_0)$ ナラバ $f(x)=1$ デアル。

更ニコノ $f(x)$ ヨリ

$$\rho(x,y)=\underset{\sigma\in\mathfrak{G}}{\text{obere Grenze}}\ \left|f(\sigma x)-f(\sigma y)\right|$$

ニヨッテ $\rho(x,y)$ ヲ定義スレバ，コレガボムル Metrik デアル。

証明ハ前ノ topologische Gruppe ノ場合ト同様デアルカラ省略スル。

最近 Bull, Amer. Math. Soc. Voll XLIII. no.2 (1937) ニ於テ A.H. Frink ガ Distance function and the Metrization problem ト云フ表題デ Chittenden ノ結果ヲ簡単ニ証明シテ居リマス。Frink ノ得タ結果ヲ用ヒルト最後ノ部分ハ少シ簡単ニナル。

Frink ノ得タ結果ハ次ノ通リデアル。

定理: 空間 R ノ任意ノ二点 x, y ニ對シテ real, non-negative + distance function $f(x,y)$ ガ定義サレ、コレガ次ノ條件

1° $f(x,x)=0$　　$x \neq y$ ナラバ　$f(x,y)>0$

2° $f(x,y)=f(y,x)$

3° $\varepsilon>0$ ニ對シテ　$f(x,y)<\varepsilon$, $f(y,z)<\varepsilon$ ナラバ　$f(x,z)<2\varepsilon$

4° $x_n \to x$ ト　$f(x_n,x)\to 0$　トハ同等.

ヲ満足シテ居レバ

$$\rho(x,y)=\underset{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1}\in R}{\text{untere Grenze}}\{f(x,x_1)+f(x_1,x_2)+\cdots\cdots+f(x_{n-1},y)\} \quad \cdots\cdots(2)$$

ニヨツテ定義サレタ $\rho(x,y)$ ハ R ノ Metrik トナリ且ツ $\rho(x_n,x)\to 0$ ト $f(x_n,x)\to 0$ シタガツテ $x_n \to x$ ト同等デアル。

但シ (1) ニ於ケル untere Grenze ハ任意ノ有限個ノ $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n \in R$ R ノ点 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1}$ (nモウゴク) ニ對スル untere Grenze ヲ表ハス。

Frink ノ結果ヲ用ヒルタメニハ $\{V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\}$ ($n=0,1,2,\cdots\cdots$) ガ定義サレタトキ、$f(x,y)$ ヲ少クトモ一ツノ $\sigma \in \Omega$ ニ對シテ $x,y \in \sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ トナル如キ最小ノ $\frac{1}{2^n}$ ニ等シイト定義スレバヨイ。

$f(x,y)$ が $f(\sigma x, \sigma y) = f(x,y)$ ヲ満足シテヰルコトハ明カデアルカラ、$f(x,y)$ が $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ 及ビ 4° ヲ満足シテヰルコトガ証明サレレバ (2) ニヨツテ定義サレタ $\rho(x,y)$ ハ $\rho(\sigma x, \sigma y) = \rho(x,y)$ ヲ満足スル R ノ Metric トナツテ $\rho(x_n, x) \to 0$ ト $x_n \to x$ トハ同等ニナル。

1° $f(x,x) = 0$ ナルコトハ $\mathfrak{O}$ が transitive ナルコトヨリ明カデアル。即チ $\sigma x_0 = x$ ナル $\sigma \in \mathfrak{O}$ ニ對シテ任意ノ n ニ對シテ $x \in \sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ デアル。

次ニ $x \neq y$ ナルトキ $f(x,y) > 0$ ナルコトヲ示スニハ $\sigma x = x_0$, $\sigma y \neq x_0$ ナル $\sigma \in \mathfrak{O}$ が存在スルカラ $y \neq x_0$ ナルトキ $f(x_0, y) > 0$ ナルコトヲ示セバヨイ。先ヅ $y \neq x_0$ ヨリ n_0 ガ定マツテ $y \in O_{n_0-2}(x_0)$ トナル。ヨツテ勿論 $y \in V_{\frac{1}{2^{n_0-1}}}(x_0)$ デアル。然ルニ今モシ $f(x_0, y) = 0$ デアルトスレバ任意ニ大キイ n ニ對シテ σ ガ定マツテ $x_0, y \in \sigma V_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ トナルカラ $n = n_1$ ニ對シテモ σ ガ定マツテ $x_0, y \in \sigma \overline{V}_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0)$ トナル。$x_0 \in \overline{V}_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0)$ ヨリ $V_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0) \cdot \sigma \overline{V}_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0) \neq 0$ デアルカラ $V_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0)$ ノ作リカタヨリ $\sigma \overline{V}_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0) \subset V_{\frac{1}{2^{n_0-1}}}(x_0)$

コレハ $y \in \overline{V}_{\frac{1}{2^{n_0-1}}}(x_0)$ ニ矛盾スル。

2° 明カ。

3° $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ トセヨ。$f(x,y) < \varepsilon$, $f(y,z) < \varepsilon$ ヨ

リ

$$f(x,y)\leqq\frac{1}{2^n},\quad f(y,z)\leqq\frac{1}{2^n}$$

ヨッテ $\sigma,\tau\in\mathfrak{o}$ ガ定マリ

$$x,y\in\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0),\quad y,z\in\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$$

y ハ両方ニ共通デアルカラ

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

ヨッテ (1) ヨリ

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)+\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

コレヨリ

$$x,z\in\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\quad\text{即チ}\quad f(x,z)\leqq\frac{1}{2^{n-1}}<2\varepsilon$$

イ° $x_n\to x$ トセヨ。$\sigma x=x_0$ ナル $\sigma\in\mathfrak{o}$ ガ存在スル。$\sigma x_n\to x_0$ デアル。ヨッテ任意ノ m ニ対シテ n_0 ガ定マリ $n>n_0$ ナルトキ $\sigma x_n\in\nabla_{\frac{1}{2^m}}(x_0)$ 即チ

$$f(x_n,x)=f(\sigma x_n,x_0)\leqq\frac{1}{2^m}$$

m ハ任意デアツタカラ $f(x_n,x)\to 0$.

m ハ任意デアリ、且ツ $\{\mathfrak{O}_m(x_0)\}$ ハ x_0 ノ definierendes Umgebungssystem 故ニ $f(x_n,x)\to 0$ トセヨ。$\sigma x=x_0$ ナル $\sigma\in\mathfrak{o}$ ニ対シテ $f(\sigma x_n,x_0)\to 0$ デアル。ヨッテ任意ノ m ニ対シテ n_0 ガ定マリ、$n>n_0$ ナルトキ $f(\sigma x_n,x_0)\leqq\frac{1}{2^{m+2}}$ 又ハ少クトモ一ツノ τ ニ対シテ

$$\sigma x_n,x_0\in\tau\nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0).$$

コレト $x_0 \in \nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0)$ トヨリ

$$\nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0) \cdot \tau \nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0) \neq 0$$

ヨッテ $\tau \nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0) \subset \nabla_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x_0)$

故ニ $\sigma x_n \in \nabla_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x_0) \subset O_m(x_0) \quad (n > n_0)$

m が任意デアリ、且ツ $\{O_m(x_0)\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ x_0 ノ definierendes Umgebungssystem デアッタカラ $\sigma x_n \to x_0$. σ ハ Homöomorphie ナル故

$$x_n \to \sigma^{-1} x_0 = x.$$

— 以上 —