OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | locally bicompact ナ topological group ノ連續表現 |
| Author(s) | 吉田, 耕作 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1937, 135, p. 37-43 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74525 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 600. locally bicompact ナ topological group ノ連續表現

吉田　耕作（阪大）

前＝談話 383, 388, 446, 456 ニ於テ次ノ結果ヲ得マシタ。

定理：　距離付ケラレタ環 $R$ ニ横ハル群 $\mathfrak{G}$ デ locally bicompact 且ツ connected ナ topological group ノヲ連続表現スレバ $\mathfrak{G}$ ハ Lie 表現デアル。

$\mathfrak{G}$ ガ Lie 表現ト云フノハ（談話 383 参照），$R$ = real number ヲ係數トシテ一次独立ナ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$

カアッテ之ノ real number = ヨル一次結合ノ全体ヲ $\mathfrak{T}$ トスレバ

1) $a \in \mathfrak{o}$ ガ充分 $\mathfrak{o}$ ノ単位 $e$ = 近ケレバ $D(a) \in \mathfrak{O}$ ハ exp. $U$ ト表ハサレル。

コヽニ $U = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i U_i \in \mathfrak{T}$ = シテ且ツ $a \to e$ ノトキ

$$\sum_{i=1}^{h} |\alpha_i| \to 0$$

2) 任意ノ $U \in \mathfrak{T}$ = 對シテ exp. $U \in \mathfrak{O}$.

3) $\mathfrak{O}$ ノ任意ノ要素ハ exp. $U$, $U \in \mathfrak{T}$ ノ如キ $\mathfrak{O}$ ノ要素有限コノ積トシテ表ハサレル。ココニ $U$ ハ如何程デモ $0$ = 近クトレル。

即チ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space デアッタガ，之ガ Lie-ring ナルコト; $U, V \in \mathfrak{T}$ ト共ニ $(UV - VU) \in \mathfrak{T}$; ハ未ダ証明シナカッタ。

所ガ $\mathfrak{T}$ ガ Lie-ring ナルコトモ次ノ如ク容易ニ証明デキマス。

先ニ（談話 280, 291, 298）於テ，$R$ = 横ハル群 $\mathfrak{O}$ ガ Lie 群ニナルタメノ必充條件ハ $\mathfrak{O}$ ガ locally compact 且ツ connected ナコトデアルコトヲ示シマシタガ，之レモ上ノ結果カラ corollary トシテ得ラレマス。即チ $\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{O}$ 自身ノ連続表現ト考ヘレバヨロシイ。（距離空間デハ compact ト bicompact トハ一致スル）

尚上述ノ定理ハ談話 383－456 = 於イテハ locally

compact トナッテヲリマスガ之レヲ locally bicompact ト改メマシタ。ソレハ $\mathfrak{G}$ ト共ニ $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ガ l.c. ニナルトイフコトヲ使ッテヲリマス（談話383）ガ之ガ云ヘル爲ニ l.b. ト改メタ次第デス。

猪証明。談話383ニ示シタ如ク $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ連続同型ナ場合ダケヤレバ充分デスカラ $a \to D(a)$ ヲ同型對應ト假定シマス。

$U, V \in \mathfrak{J}$ トシ $UV - VU \neq 0$ ノトキ $UV - VU \in \mathfrak{J}$ ヲ示ス。

$\mathfrak{J}$ ノ element ノ定義ニヨリ，$\mathfrak{G}$ 内ノ one-parameter continuous subgroup $a(t)$, $b(t)$ ガアリ

$$D(a(t)) = \exp. tU, \quad D(b(t)) = \exp. tV.$$

コニ $a(t)a(s) = a(t+s)$, $a(0) = e$,

$\lim_{t \to t_0} a(t) = a(t_0)$

（$b$ ニツイテモ同様）デアルガ parameter $t$ ヲ適當ニトッテヲイテ

$$\begin{cases} a(t) \in \mathfrak{V}, \quad b(t) \in \mathfrak{V}, \quad -1 \leqq t \leqq 1 \\ \mathfrak{V} \text{ ハ } \mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{-1} \text{ ナル如キ } e \text{ ノ近傍} \end{cases}$$

ト假定シテイテ差支ヘナイ。（$a(t)$ ノ代リニ $a(\alpha t)$ ヲトリ $\alpha$ ヲ充分大キクトレバヨイ）。

コゝニ於イテ

$$C_n = a\left(\frac{1}{n}\right) b\left(\frac{1}{n}\right) a\left(\frac{-1}{n}\right) b\left(\frac{-1}{n}\right)$$

ト置クト $n$ ガ充分大キイ所デハ $C_n \neq e$.

何者，若シ然ラズトスレバ

$$a\left(\frac{1}{n}\right)b\left(\frac{1}{n}\right)=b\left(\frac{1}{n}\right)a\left(\frac{1}{n}\right)$$

即チ　$$\exp\frac{U}{n}\exp\frac{V}{n}=\exp\frac{V}{n}\exp\frac{U}{n}$$

ナル如キ $n$ が無限ニ多クナケレバナラナイ。所ガ

$$\exp\frac{U}{n}\exp\frac{V}{n}=E+\frac{1}{n}(U+V)$$

$$+\frac{1}{n^2}(U^2+2UV+V^2)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

（$E$ ハ $\mathfrak{o}$ ノ単位）ナルコトガ直グワカルカラ $UV=VU$ ヲ得テ不合理デアル。

故ニ始メカラ $C_n\neq e$；$n=1,2,\cdots\cdots$ トシテヲク。$\mathfrak{o}$ ハ l. b. ダカラ $\overline{\nabla}$ ヲ充分小サクトッテ $\overline{\nabla}$ ノ閉被 $\overline{\overline{\nabla}}$ が bicompact 且ツ

$$|D(a)-E|<1 \qquad \text{for} \quad a\in\overline{\overline{\nabla}}$$

トシテ置ク。

$\mathfrak{o}$ ハ arbitrarily small cyclic subgroup ヲ含マナイ（談話383）カラ各 $C_n$ ニ対シテ

$$\begin{cases} C_n^{m}\in\overline{\overline{\nabla}} & \text{for } m=0,\pm1,\cdots\cdots,\pm l_n \\ C_n^{\pm(l_n+1)}\in\overline{\overline{\nabla}}(e) \end{cases}$$

ナル如キ正整数 $l_n$ が撰ベル。$\min.(l_n,n^2)=m_n$ ト置ク。$\frac{m_n}{n^2}$ ハ1ヨリ大キクナイ正数デアリ，且ツ $\overline{\overline{\nabla}}$ ハ bicompact デ第一可附番公理ガ $\mathfrak{o}$ デ満足サレルカラ（談話456）

$$\lim_{n'\to\infty}\frac{m_{n'}}{(n')^2}=t_0,\qquad 0\leqq t_0\leqq 1$$

$$\lim_{n'\to\infty}C_{n'}^{m_{n'}}=C\in\overline{\nabla}$$

ナル如キ整数列$\{n'\}$ガ存在スル。

故ニ　$$\lim_{n'\to\infty}D(C_{n'})^{m_{n'}}=\lim_{n'\to\infty}D\left(C_{n'}^{m_{n'}}\right)=D(C).$$

従ッテ談話383ト同様ニシテ

$$\lim_{n'\to\infty}m_{n'}\{D(C_{n'})-E\}=\lim_{n'\to\infty}m_{n'}\ln D(C_{n'})$$
$$=\lim_{n'\to\infty}\ln\{D(C_{n'})^{m_{n'}}\}$$
$$=\ln D(C)$$

ヲ得ル。所ガ

$$m_{n'}\{D(C_{n'})-E\}=m_{n'}\{D(a(\tfrac{1}{n'}))D(b(\tfrac{1}{n'}))$$
$$-D(b(\tfrac{1}{n'}))D(a(\tfrac{1}{n'}))\}D(a(\tfrac{-1}{n'}))D(b(\tfrac{-1}{n'}))$$

デアリ

$$\lim_{n'\to\infty}D(a(\tfrac{-1}{n'}))D(b(\tfrac{-1}{n'}))=E$$

デアルカラ

$$\ln D(C)=\lim_{n'\to\infty}m_{n'}\{[D(a(\tfrac{1}{n'}))-E][D(b(\tfrac{1}{n'}))-E]$$
$$-[D(b(\tfrac{1}{n'}))-E][D(a(\tfrac{1}{n'}))-E]\}$$

此ノ右辺第一項ハ

$$\frac{m_{n'}}{(n')^2} n' \left[ D\left(a\left(\frac{1}{n'}\right)\right) - E \right] n' \left[ D\left(b\left(\frac{1}{n'}\right)\right) - E \right]$$

トナルガ，

$$n' \left[ D\left(a\left(\frac{1}{n'}\right)\right) - E \right] \to \ln D(a(1)) = U,$$

$$n' \left[ D\left(b\left(\frac{1}{n'}\right)\right) - E \right] = V$$

＝ナル（談話383）カラ結局

$$\ln D(c) = t_0 (UV - VU)$$

ヲ得ル。

コレ＝ $C \neq e$ 即チ $t_0 \neq 0$ デアル。何者，無限＝多クノ $n'$ ＝対シテ $m_{n'} = n'^2$ ナラ $t_0 = 1$ ダカラ文句ヘナイ。若シアル $n'_0$ カラ先キノ $n'$ ＝対シテ常＝ $m_{n'} < n'^2$ トスレバ之等ノ $n'$ ＝対シテ $m_{n'} = l_{n'}$。故＝

$$C_{n'}^{\pm(m_{n'}+1)} \in \overline{V} \qquad \text{for} \quad n' \geqq n'_0$$

然ラバ，$V_1$ ヲ以テ $V_1 = V_1^{-1}$ 且ツ $V_1^2 \subseteq V$ ナル如キ $e$ ノ近傍トスルト $C_n^{m_{n'}} \in V_1$.

ヨッテ $C \neq e$ 即チ $t_0 \neq 0$.

$$\ln D(c) = t_0 (UV - VU)$$

即チ $D(c) = \exp(t_0(UV - VU)$ ト $C_{n'} \to e$，$C_{n'}^{m_{n'}} \to C \neq e$ トカラ $t_0(UV - VU) \in \mathfrak{J}$（談話383）。

然シテ $\mathfrak{J}$ ハ real linear space デ $t_0 \neq 0$ ダカラ $UV - VU \in \mathfrak{J}$。 — 以上 —

之デ略々 definitive ナ結果＝到達シタヤウ＝思ヒ

マス。