



Title	領域ノ移動ニヨル Dirichlet ノ問題ノ解ノ変化ニツイテ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 136, p. 49-56
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74528
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

603. 領域ノ移動ニヨル *Dirichlet* ノ問題 ノ解ノ変化ニツイテ

井 上 正 雄 (阪大)

平面上ノ有界ナ領域¹⁾ Ω ヲ考ヘ, コノ境界ヲ Σ , コノ
 Σ 上ニ定義サレタ連続実函数ヲ $f(z)$ トスル。

シカルトキ次ノ *Wiener* ノ定理ニヨリ Ω 内デノ調和
函数ガ一意的ニ定メラレル。

Wiener ノ定理:

$f(z)$ ノ $\Omega + \Sigma$ 上ニマケルーツノ連続接続²⁾ $\mathcal{F}(z)$ ヲ考
ヘル。

ソシテ Ω 内 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナル單調増加スル (Ω_{n+1}
 $\supset \Omega_n$) *normal domain*³⁾, 系列 $\{\Omega_n\}$ ヲ撰ビ, コ
ノ Ω_n ニマケル境界値 $\mathcal{F}(z)$ ナル調和函数即チ *Dirichlet*
ノ問題ノ解ヲ $u(z, \mathcal{F}, \Omega_n)$ トスルトキ, $u(z, \mathcal{F}, \Omega_n)$
ハ $\mathcal{F}(z)$ 及ビ系列 $\{\Omega_n\}$ ノ撰ビ方ニ無関係ナル Ω 内デ
ノーツノ有界ナ調和函数ニ収斂スル。

1) 有界ナル領域トイフハ本質的ナ條件ガハナイガ, 簡單ノタメニカク假定
シテオク, 且ツ領域ハスベテ單葉 (*Schlicht*) ナモノヲ考ヘルコトニスル。

2) 連続接続 $\mathcal{F}(z)$ ハ次ノ條件ヲ満足スル函数ノコトデアル。

$z \in \Sigma$ ナラバ $\mathcal{F}(z) = f(z)$ 且ツ $\mathcal{F}(z)$ ハ $\Omega + \Sigma$ 上デ連続。

3) *normal domain* トハ境界上ノスベテノ点デ共ヘラレタ値ヲ
トルヤウナコノ領域内デノ調和函数ガ任意ノ境界上ニ共ヘラ
レタ連続函数ニオシテ成立スルヤウナ領域ヲイフ。

この方法 = ヨツテ得ラレル調和函数ヲ $U(z, F, \Omega)$ ナ表
ハスコト = スル。

この函数ハ領域 Ω ノ境界条件 $f(z)$ = 対スル *Dirichlet* ノ問題ノ *generalised solution* ト呼バレルモノデア
アツテ、若シ Ω が *normal* ナラバ $U(z, F, \Omega)$ ハ普通
ノ意味ニヲケル *Dirichlet* ノ問題ノ解 トナルモノデア
ル。

この談話 = フイテハ、アル特殊ナ領域 = 対シテ定理ノ系
列 $\{\Omega_n\}$ = 対スル $\Omega \subset \dots \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ ナル条件ヲ撤
去出来ルコトヲ示ス = アル。

γ ノ $\gamma = f(z)$ ノ全有限平面上ニヲケル連続接続ヲ
 $F(z)$ トシ、 $\lim \Omega_n = \Omega$ ナル任意ノ *normal domain*
ノ系列 $\{\Omega_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(z, F, \Omega_n) = U(z, F, \Omega)$$

カ成立スル γ ノ条件ヲ考察スル。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega \quad \text{ハ次ノ意味ニ解釈スル。}$$

点 z ノ適當ナ一ツノ近傍ヲ画ケバコレガ充分先ノ Ω_n 中
ニ Ω_n = 含マレルトキ、カナル点 z ノ集合ヲ $\{\Omega_n\}$ ノ核
ト呼ビ、 $\{\Omega_n\}$ ノ如何ナル部分系列 $\{\Omega_{n_k}\}$ モ常ニ核トシ
テ Ω ヲ持ツトキ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ トスル。

若シ *normal domain* ノ系列 $\{\Omega_n\}$ が Ω = 関シテ任
意ノ F = 対シテ常ニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(z, F, \Omega_n) = U(z, F, \Omega)$$

ヲ ~~成~~ 成スルトキ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W (Ω = 関シテ) ヲ有スト

云ハシ。

以上ノ意味ニテ Wiener ノ定理ハ次ノ如ク述べラレル。

“ $\Omega \supset \dots \supset \Omega_{n+1} \supset \Omega_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ
 $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ⁴⁾ヲ有ス。”

之ノ定理ニテ領域ノ單調性ノ不必要ナルコトハ容易ニ示セル。即チ

“ $\Omega \supset \Omega_n \quad n = 1, 2, \dots$
且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ⁴⁾ヲ有ス”

次ニ

“ $\Omega_n \supset \Omega_{n+1} \supset \dots \supset \Omega$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$
ナル $\{\Omega_n\}$ が存在スレバ、 $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ⁴⁾ヲ有ス” コトが
証明サレル。

コレヨリ更ニ

“ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\} = \text{對シ}$
 $\Omega_n^* \supset \Omega_n \quad (n = 1, 2, \dots)$
且 $\Omega_{n+1}^* \supset \Omega_n^* \supset \dots \supset \Omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n^* = \Omega$ ナル
 $\{\Omega_n^*\}$ ⁴⁾ヲ撰ブコトが出来レバ、 $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ⁴⁾ヲ
有ス” コトがワカル。

從ツテ又、次ノコトがワカル。

“境界点が常ニ外点ノミノ收積点ト見ナシ得ル如キ領域
 $\Omega = \text{對シテ}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ、 $\{\Omega_n\}$ ハ性質
 W ⁴⁾ヲ有ス”

4) 以下特ニコトワラナイ限リ常ニ normal domain ノ系列ヲ
ノミ考ヘルコトニスル。

特別ノ場合トシテ

“有限個或無限個ノ Jordan curve デ囲マレタ領域
 $\Omega = \text{對シテ}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ, $\{\Omega_n\}$ ハ性
質 W ヲ有ス”

シカシ以上ノコトデハ, 例ヘバーツノ *bogen* ヲ境界=モッ
マケナ領域=對シテノ條件が明瞭デナイ。

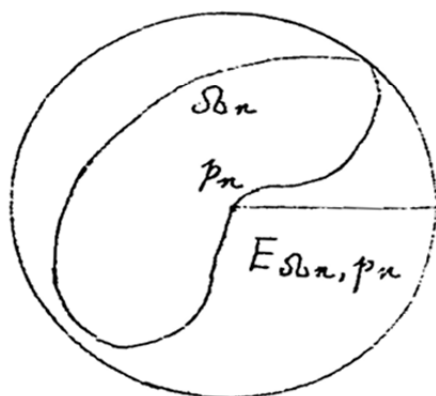
ソコデ $\{\Omega_n\}$ が次ノ條件ヲ満足シテイルトシマシ。

(C): Ω ノ *regular* ナ境界点 $p = \text{ヲイテ}$ 充ム先ノ Ω_n ノ
境界 Σ_n 上ニ夫々境界点 p_n ヲ次ノ如ク選ハコトが出
来ル。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

且ツ $\bigcap_{n \geq N} E_{\Omega_n, p_n}$ が原点ヲ含ム一ツノ線分ヲ含ム。

コノ E_{Ω_n, p_n} ハ Ω_n ノ p_n ヲ原点トスル *projection*
ヲ表ハス。即チ p_n ヲ中心トシ Ω_n ヲ含ム円ノうち半径
ノ最小ノ円ヲ画キ, コノ円内
ノ点デ $\Omega_n = \text{含マレナイ点}$ ノ
 p_n カラノ距離ノ集合ヲ E_{Ω_n, p_n}
 p_n デ表ハス。從ツテコレハ
0 ヲ含ム正ノ実数カラナル閉
集合デアル。



コノ條件ノ下ニ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\}$ が性質 W ヲ有スルコトヲ証
明シマシ。

$\Omega_n = \Omega$ として $U(z, \mathcal{F}, \Omega_n)$ を作れば之れハ一樣 = 有界 + 調和函数ノ系列デアルカラ, 任意ノ部分列 = 対シコレカラ更 = 適當 = 部分列 $\{U(z, \mathcal{F}, \Omega_{n_k})\}$ をトッテ一ツノ函数 $= \Omega$ デ一樣収斂サスコトが出来ル。コノ函数ヲ $H(z)$ トスルトキ之レハ Ω デ有界 + 調和函数ナルコトハ明カデアアル。

故 = $H(z) = U(z, \mathcal{F}, \Omega)$ ナルコト証明スレバ充分デアアル。

ソノタメ $H(z)$, Ω , *regular* + 境界点 $p = \mathcal{F}$ ケル値ヲ計算スル。(証明ハ Kelloggノ方法ヲ少し *modify* スレバヨイ)。

任意 = 正数 $\varepsilon (> 0)$ を與へメトキ

$|p - z| < \delta$ ナラバ $|\mathcal{F}(p) - \mathcal{F}(z)| < \varepsilon$ ナル如キ $\delta (> 0)$ が定マル。

シカラバ勿論

$|p - z| < \delta, |p - z'| < \frac{\delta}{2}$ ナラバ $|\mathcal{F}(z') - \mathcal{F}(z)| < 2\varepsilon$

次 = Ω が完全 = 含ム一ツノ円ヲ C トスレバ

$$\text{D. G.} \quad \left| \frac{\mathcal{F}(z') - \mathcal{F}(z)}{z' - z} \right| = M$$

$|p - z'| < \frac{\delta}{2}, |p - z| \geq \delta, z \in C$

ナル有限値 M が定メルコトが出来ル。

故 =

$z \in C, |p - z'| < \frac{\delta}{2}$ = 對シテ

$$\mathcal{F}(z') - M|z' - z| - 2\varepsilon < \mathcal{F}(z) < \mathcal{F}(z') + M|z' - z| + 2\varepsilon$$

z' トシテ トク = 条件 (C) = 於ケル p_n' ヲ トレバ

$$F(p_n') - M|p_n' - z| - 2\varepsilon < F(z) < F(p_n') + M|p_n' - z| + 2\varepsilon$$

$\Omega_{n'}$ = 對シ、コノ 境界上ノ 点ノ 値ガ p_n' カラノ 距離 = r 如キ $\Omega_{n'}$ ノ 内デノ 調和函数ヲ $V(z; p_n')$ トスレバ、

$$z \in \Omega_{n'} \text{ ナラバ } |p_n' - z| < V(z; p_n')$$

從ツテ $z \in \Omega_{n'}$ ナラバ

$$F(p_n') - MV(z; p_n') - 2\varepsilon < F(z) < F(p_n') + MV(z; p_n') + 2\varepsilon$$

故ニ

$$F(p_n') - MV(z; p_n') - 2\varepsilon < U(z, F, \Omega_{n'}) < F(p_n') + MV(z; p_n') + 2\varepsilon$$

條件ノ $\prod_{n' > N} E_{\Omega_{n'}}, p_n'$ ガ 含ム ツノ 線分ヲ ℓ (原点ヲ 含ム) トシ、更ニ 原点ヲ 中心トスル 充分大ナル 半径ノ 円 E ヲ 画キ、 E オラ ℓ ヲ 切り取ツタ 領域ヲ Δ トシ、充分先ノ n' = 對シ $\Delta \cap E_{\Omega_{n'}}, p_n'$ ナラシメル。

コノ Δ = 對シテ 境界上ノ 値ガ 原点カラノ 距離 = r 如キ Δ 内デノ 調和函数ヲ $V(s)$ トスレバ (Δ $\wedge$ normal domain), 充分先ノ n' = 對シテハ

$$V(z; p_n') \leq V(-|p_n' - z|)^{5)} \text{ トナル。}$$

故ニ

5) 同ハベ Bemling, thise. 参照

$$\begin{aligned} f(p_n) - MV(-|p_n - z|) - 2\varepsilon &< \mathcal{U}(z, f, \Omega_n) \\ &< f(p_n) + MV(-|p_n - z|) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

シカレ $z \in \Omega$ ナラバ, z ハ 充分先ノ スベテノ Ω_n = 含マレルカラ

$$\begin{aligned} f(p) - MV(-|p - z|) - 2\varepsilon &\leq \lim_{n' \rightarrow \infty} \mathcal{U}(z, f, \Omega_{n'}) \\ &= H(z) \leq f(p) + MV(-|p - z|) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

更ニ $\lim_{z \rightarrow p} V(-|p - z|) = 0$ ナル故

$$f(p) - 2\varepsilon \leq \lim_{z \rightarrow p} H(z) \leq \overline{\lim_{z \rightarrow p} H(z)} \leq f(p) + 2\varepsilon$$

ε ハ 任意デアツタカラ

$$\lim_{z \rightarrow p} H(z) = f(p) = f(p)$$

$H(z)$ ハ 有界且ツ Ω ノ *regular* ナ境界点 p ナ

$$\lim_{z \rightarrow p} H(z) = f(p) \text{ ナル故} = H(z) = \mathcal{U}(z, f, \Omega) \text{ 6) } \text{ト}$$

ナル。

故ニ, 結局

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}(z, f, \Omega_n) = \mathcal{U}(z, f, \Omega)$$

即チ “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\}$ ガ 条件 (C) ヲ 満足スレバ
 $\{\Omega_n\}$ ハ 性質 W ヲ 有ス”

従ツテ ス コレ ヨリ 容易ニ 次ノ コトヲ 知ル。

“ Ω ヲ 有限次連結領域トスルトキ

6) Kellogg ノ 定理 (平面ノ 場合)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ 且ツ Ω_n ノ連結度が有界ナラバ
 $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス。(但シ Ω_n ハ *normal* ナ
 ナラモヨイ) ”

換言スレバ連結度が有界ナル領域 (必ズシモ *normal* タルヲ
 要シナイ) ノミ考ヘルコト = スレバ, コレヲノ領域 = 周ス
 ルーツノ連続函数 = 対スル *Dirichlet* ノ問題ヲ領域ノーツ
 ノ汎函数ト見テ連続ナルコトが解ツタ。

シカシ領域ノ連結度ノ有界ナルコトハ果シテ本質的ナル條
 件デアラウカ? —

即チ任意ノ領域 $\Omega =$ 対シ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ナル *normal*
*domain*⁷⁾ ノ系列 $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス? — ト云フ問
 題が残ル。

コレが自分 = ハ未ダ解決シ得ナイ處デアル。読者諸兄ノ御教
 示ヲ御希ヒシタイ。

(注意): 以上 = オケル考察ハ境界 Σ ノ *ensemble impropre*
 e ノ近傍ヲ除外シテ云ハルレバ, ソレガ充分ナルコトハ
 e ノ性質ヨリシテ明カナルコトデアアル。

7) コノ *normal* ナル條件ハ一般ノ場合取り去ルコトハ出来
 ナイ。