



Title	Lieノ第二基本定理ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 137, p. 66-69
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74532
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

607. Lieノ第二基本定理 = 就テ

吉田耕作(阪大)

R ヲ距離付ケラレタ環, $\mathcal{J}$ ヲ $X_1, \dots, X_n$ ヲ其ノ基
トスル $Lie-ring \subseteq R$ トスル。コノトキ $X, Y \in \mathcal{J}$ ト
シテ

$$(\exp X)(\exp Y) = \exp Z(x, y)$$

ナル如キ $Z(X, Y) \in \mathcal{J}$ ノ存在スルコトヲ示シ且ツ其ノ形
ヲモ與ヘタイ。

証明ノ *essential + idee* ハ *Leipziger Berichte* (1906) = 於ケル *H. Hausdorff* = ヨルガ, *H.*ノ
如ク *formal* ナク且ツ幾分ワカリ易イダラト思ヒマ
ス。

H. p.26 デハ $x = (wx)$ ナレバ w キ *new symbol* w
ヲ導入シナケレバナラナカッタリシテ一寸氣持が悪イケレド
モ之レ等モ避ケラレマス。 *Differential operator* =
関スル $Lie-ring$ ノ場合モ以下ヲ多少 *modify* スレバ
得ラレル。尚本紙談話337 = 於ケル証明ハ誤ツテアリマ
シタ (*Vertauschbar* デナイモ、*Vertauschbar* ナ
ルカノ如ク取扱ツタノデ)

I. 以下 = 出テ來ル無限級数が X, Y 等ノ 0 = 近イトキ
絶対一樣收斂ナコトハ容易ニ分リマス。

先ヅ $X, Y, U, V \in R$ トシ α, β ガイ實数ノトキ

$$(1) \begin{cases} \exp(X + \alpha U) = (\exp X) \{E + \alpha \mathcal{F}(U, X) + O(\alpha^2)\} \\ \exp(Y - \alpha V) = \{E - \alpha \mathcal{P}(V, Y) + O(\alpha^2)\} (\exp Y) \end{cases}$$

コゝニ

$$(2) \begin{cases} \mathcal{F}(U, X) = U + \frac{[U, X]}{2} + \frac{[[U, X], X]}{6} + \dots \\ \mathcal{P}(V, X) = \mathcal{F}(V, -X), \quad [A, B] = AB - BA \end{cases}$$

証明： 一般ニ Γ 級数 $f(x)$ が與ヘラレタ時 $f(X + U)$ = 於テ其ノ factor トシテ U ヲ唯一ツ含ム項全体ノ和ヲ $\overline{f(X+U)}$ トカケバ

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(X+U)}^n}{n!} = (\exp X) \mathcal{F}(U, X)$$

ヲ示セバヨイ。所ガ

$$(4) \frac{\overline{(X+U)}^n}{n!} = \frac{\overline{(X+U)}^{n-1}}{(n-1)!} \frac{X}{n} + \frac{X^{n-1} U}{n!}$$

今簡單ノタメ $[U, X] = (UX)$, $[[U, X], X] = (UX^2)$,

----- ト略記スレバ (3) ヲ云フニハ, (2) ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned} \frac{\overline{(X+U)}^n}{n!} &= \frac{(UX^{n-1})}{(n-1)!} + \frac{X(UX^{n-2})}{(n-1)!} + \dots \\ &\quad + \frac{X^{n-2}(UX)}{(n-2)!} + \frac{X^{n-1}U}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ガ云ヘレバヨイ。之ハ (4) = ヨリ歸納法デスグワカル。

II. X, Y が充テ 0 = 近ケレバ

$$\begin{cases} (\exp X)(\exp Y) = \exp(Z(X, Y)) \\ Z(0, Y) = Y, \quad Z(X, 0) = X \end{cases}$$

ナル如キ $Z(X, Y) \in R$ が *unique* = 定マル。即
チ

$$(5) \quad l_n(\exp X \cdot \exp Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\exp X \cdot \exp Y - E)^n$$

横テ今 $U = X$ 即チ $\mathcal{F}(\bar{U}, X) = X$ トヲキ $\nabla(X, Y)$ ヲ
 $\psi(\nabla, Y) = X$ = ヲツテ定メル。直 γ ∇ カル如 γ (級数 $\propto \frac{Y}{e^{\frac{Y}{2}} - 1}$
ト比較セヨ)

$$(6) \quad \begin{cases} \nabla(X, Y) = X - \frac{1}{2}(XY) + \frac{B_2}{12}(XY^2) - \frac{B_4}{24}(XY^4) + \dots \\ B_i \text{ は Bernoulli number} \end{cases}$$

然ラバ (1) = ヲリ

$$\exp Z(X + \alpha X, Y - \alpha \nabla(X, Y)) = (\exp X)(E + \alpha X + o(\alpha)) \\ (E - \alpha \nabla(X, Y) + o(\alpha))(\exp Y)$$

ヨツテ $\frac{\partial}{\partial \alpha} \exp(Z(X + \alpha X, Y - \alpha \nabla(X, Y))) = 0$ for
 $\alpha = 0$. 故ニ級数 l_n ヲ用ヒテ頂別微分スレバ結局

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial Z(X + \alpha X, Y - \alpha \nabla(X, Y))}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{for } \alpha = 0 \\ Z(0, Y) = 0 \end{cases}$$

III. (7) ヲ解クコト。

$$X = \sum_{i=1}^n t_i X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \delta_i Y_i \quad \text{ト置ケバ (6) = ヲ}$$

$$\nabla(X, Y) = \sum_{i=1}^n v_i(t, \delta) X_i,$$

$$\text{ココニ } v_i(t, \delta) = t_i + \mu_i(t, \delta) \text{ ノ形ヲ } \mu_i \text{ ハ } t =$$

は *linear homogeneous*.

$$\text{故 } Z(X + \alpha X, Y - \alpha \nabla(X, Y))$$

$$= Z\left(\left(1 + \alpha\right) \sum_{i=1}^n t_i X_i, \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \alpha v_i(t, \Delta)) X_i\right)$$

故カテ (7) = ヲリ, $Z(X, Y) = Z(t, \Delta)$ トヲイテ

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial Z(t, \Delta)}{\partial t_i} = \sum_{i=1}^n v_i(t, \Delta) \frac{\partial Z(t, \Delta)}{\partial \Delta_i}$$

$Z(t, \Delta)$ は $t =$ ヲキ k 次同次 + term $Z_k(t, \Delta)$,
和トスル。

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots$$

然ラバ (7) = ヲリ $Z_0 = \sum_{i=1}^n \Delta_i X_i$ 又 (8) = ヲリ v が t ,
一次同次式 + コト = 注意スルバ

$$k Z_k = \sum_{i=1}^n v_i(t, \Delta) \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial \Delta_i}$$

ヨツテ微分演算子 $A(t, \Delta) = \sum_{i=1}^n v_i(t, \Delta) \frac{\partial}{\partial \Delta_i}$ ヲ導入

スルバ

$$Z(X, Y) = Z(t, \Delta) = (\exp A(t, \Delta)) \sum_{i=1}^n \Delta_i X_i$$

ヲ得ル。ヨツテ $Z(X, Y) \in \mathcal{J}$ 且ツ同時 = Z ノ形が求マ

ツタ。