



Title	Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable funktional equation (I)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 137, p. 70-80
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74533
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

608. Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation (I)

北 川 敏 男 (阪大)

緒 言

1. Bochner-Neumann⁽¹⁾ の operational diff. eq.

$$(1) \sum_{\nu=0}^n \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} A_{\nu} \mathcal{P}_t = 0$$

—— $\mathcal{P}_t$ は $-\infty < t < \infty$ で定義サレテ或ル與ヘラレタ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の値ヲトル函数デアリ。 $A_0, A_1, \dots, A_n$ は或ル性質條件ヲ具ヘタ $\mathcal{H}$ の linear operators デアル —— ヲ論ジ (1) の Compact solution (compact トイフノハ、 $\mathcal{H}$ の strong topology = 関シテデアル) ハ、展開

$$(2) \mathcal{P}_t \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\beta_n t}$$

(1) S. Bochner and J. V. Neumann: On compact solutions of operational-differential equation, I, *Annals Math.*, Vol. 36, (1935)

コノ論文ヲ [C] で表ハス。 Hilbert 空間ノ用語ニ関シテ

コノ論文ニ従フ。

ヲ admit スルコト (茲ニ α_n ハ h_f ノ elements, β_n ハ t ニ無関係ナ実数) 並ビニコノ級数がアル種ノ grouping of terms = ヨツテ $-\infty < t < \infty$ = 於テ uniformly convergent デアルコトヲ示シ, コレニヨツテ、カニル解ハ almost periodic ⁽²⁾ アレトイフコトヲ示シタ。

コノ結果ニ到達スル方法ハ、本質的ニハ変数 t ノ separation トイヒ得ルデアロウ。即チ方程式 (1) ヲ粗策ナ言ヒ方デアアルガ、要スルニ、abstract space = 於ケル常数係数ノ有限階微分方程式ト見做ソウトイフ所ニ要點がアルヤウニ思ハレル。

然ルニ常数係数ノ微分演算ハ微分又ハ移動 (translations) ト可換デアアル。linear translatable operations = 關スル結果がソレト密接ニ關係ニアルコトハ言フマデモナイ。⁽³⁾ 依ツテ、次ノ問題ノ起ルハ極メテ自然的トイハネバナラヌ。即チ Neumann - Bochner ノ結果ハ operational translatable functional eq. = 對シテ拡張出来ナイデアロウカトイフ問題コレデアアル。

然ルニ、ユノ問題ニ對シテ [C] = 於ケル analogy ヲ求メルコトハ、若シ Linear translatable operations

(2) [C] Theorems I, II 並ビニ III.

(3) 筆者: On the theory of linear translatable functional eq. and Cauchy's series. 掲載ニ三卷 (1937). コノ拙論ヲ引用スルトキ [T] ヲ以テ示ス。

ヲ [T] = 於ケル如ク一様 = トルナラバ, 相當困難が免レナイ。此処カハ, *Stieltjes type* ト呼ブ特殊ノ *Linear translatable operations* Γ ヲ h_t = 於テ定義シテ *operational linear translatable funct. eq.* トモイフベキ

$$(3) \sum_{\nu=0}^n A_{\nu} \Gamma_{\nu, t} p_t = 0$$

ヲ論ジテミル。(4)

2. 先ヅ *Stieltjes 型*ノ *Linear translatable operations*ノ定義ヲ述べナケレバナラズ。 ψ_t ハ, $-\infty < t < \infty$ デ定義サレテ h_t ノ値ヲトル函数トシ, コレガ *Bochner-Neumann* [C] = 於ケル意味ガ任意ノ有限區間デ可積分デアルトスル。 $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ デ定義サレテ有界変分函数デアルヤウナ複素数函数 $g(\lambda)$ ヲ考ヘルコトニシヤウ。 h_t ノ任意ノ f = 對シテ *linear functional* (t ヲ *fixed* シテ考ヘテ)

$$L_t(f) = \int_{\alpha}^{\beta} (\psi_{t+\lambda}, f) dg(\lambda)$$

ヲ考ヘルコトニシヤウ。 *Schwarz*ノ不等式 = ヨリ, コレハ, 有界ナ *Linear functional* デアルカラ, *F. Riesz*ノヨク知ラレタ定理 = ヨリ, $L_t(f) = (g_t^*, f)$ ナル f = 無

(4) *Stieltjes 型*ノ *operation* トカ (3)ノ意味トカハ 以下説明スルノデアル。

関係ナ, $t = \Delta$ depend スル g_t^* が一意ニ定マル。ソコ
 テ

$$(4) \int_{\alpha}^{\beta} \psi_{t+\Delta} dg(\Delta)$$

ハコノ g_t^* ナリト定義スル。(5)

$I\psi_t = g_t^*$ トオキ, コノ operation ヲ Stieltjes
 型⁽⁶⁾ノ Linear translatable op. ト呼ブノデアアル。コ
 ノ Operations が translation 並ニ任意有限区間
 上ノ積分ト可換ナルコトハ言フ迄モナイ。⁽⁷⁾

コレヲノ Operations ハイロイロナ realizations
 7 ムツ。by $(x_1, x_2, \dots)$ ナル Complex numbers
 ノスベテノ sequences (1. $\sum |x_k|^2 < \infty$) カラナリ,
 inner product トシテハ $(f, g) = \sum f_k \overline{g_k}$ デアル
 マウナ 空間ニ對シテハ, $\psi_t = (x_1(t), x_2(t), \dots)$
 トシ

$$(6) \int_{\alpha}^{\beta} \psi_{t+\Delta} dg(\Delta) = (y_1(t), y_2(t), \dots)$$

(5) コノ議論ハ [C], Part I, Preliminaries, 1 p. 261
 ト同様

(6) (4)ハ Stieltjes integral ノ形ニナツテキルカラ。

(7) 区間 $[\alpha, \beta]$ ノ意味ハ, $\alpha < \Delta$ 及ビ $\Delta > \beta = \infty$ シテハ, トニカク
 $g(\Delta) = \text{const}$ ナリフコトデアアル。effective range がキツカリ
 $[\alpha, \beta]$ トイフノデハナイ。 $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ デアルコトヲ假定スルコトヲ明
 記ナケレバナラス。コノ時 $[\alpha, \beta] = \text{distribute}$ ナレテキルト言フコトニシテ,

トオク トキ

$$(7) \quad y_p(t) = \int_{\alpha}^{\beta} x_p(t+\Delta) dg(\Delta) \quad (p=1, 2, \dots)$$

トナルコトハ $[C]$ ノ議論ヲ繰返セバヨイノデアアル。更ニ
 M ヲ Euclid 空間ノ可測集合トシテソノ measure 正ナ

ルトキ, $\int_M |f(p)|^2 d\nu_p < \infty$ ナルマウナ $f(p)$ ノ全体カラ
ナル h_f (コレヲ L_M^2 デ表ハス) ニ對シテモ, $[C]$ ノ議論ニ
ヨリ, Linear translatable operations of Stieltjes typeノ realizationsヲ得テ $[C]$ ト同様ノ結果ヲ
得ルコトハ明カデアアル。

3. コノ談話ニ於テ申上マウト思フ定理ハ, 今ヤ次ノ形
デ述べエラレル。⁽⁸⁾

假定 a) Hilbert 空間 h_f , コノ空間ノ Linear
operations $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$; variable point
 $\varphi_t (-\infty < t < \infty)$ ヲ考ヘル。

假定 b) φ_t ハ Bochner--Neumannノ意味ガ任意
ノ有限区間ガ可積分。 A_ν ハ高々 zero measure,
 t -setヲノビテ, $I_{\nu, t} \varphi_t$ ニ對シテ define セラレテ居
リ次ノ關係が成立スル:

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^n A_\nu(I_{\nu, t} \varphi_t) = 0$$

(8) 關係式(8)ガ $[C]$ ト違ッタ形デアアルコトヲ, 假定 C_1 及ビ C_2 ガ $[C]$
ニハナカッタ事ナドニ注意セラレタイ。

假定 C₁) $\mathcal{F}_t$ は h_t の strong topology 1 意味が一様
= 連続である。

假定 C₂) $\mathcal{F}_t, -\infty < t < \infty$ 上の set 系は h_t の
strong topology 1 意味で compact である。

假定 d) ψ が若シ

$$(9) \quad A_0 \psi = A_1 \psi = \dots = A_n \psi = 0$$

ヲミマスナラ、 $\psi = 0$

假定 e) $I_{\nu, t}$ 1 Weighting functions 7 夫々
 $g_{\nu}(t)$ トスル。コレハ或ル有限区間 $[\alpha, \beta]$ - distribute
サレテキルトスル。

$$(10) \quad G_{\nu}(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda t} dg_{\nu}(t) \quad (\nu=0, 1, 2, \dots, n)$$

トオクトキ

$$(11) \quad G_{\nu}(\lambda) \sim \sum_{\delta=1}^m A_{\nu, \delta} e^{h_{\nu, \delta} \lambda} \quad (as |\lambda| \rightarrow \infty)$$

ナル近似展開ヲモツ。コレニ、 $A_{\nu, \delta}$ ハ複素数デアリ、 $h_{\nu, \delta}$
ハ実数デ

$$(12) \quad h_{\nu, 1} < h_{\nu, 2} < \dots < h_{\nu, m_{\nu}} \quad (9) \quad (\nu=0, 1, 2, \dots, n)$$

ナル関係ガアルトスル。

定理: 假定 a) — e) が成立シ、 A_{ν} 並ビ A_{ν}^* が
スベテ相互=可換デアルトスル。然ルトキニハ、次ノコトが
成立スル。

(9) $m_{\nu} = 1$ デアルカモ知レヌ。

差 =、有限個又ハ可附番無限個ノ相互 = *Orthogonal*
 + *closed linear manifolds* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ が
 アツテ $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots = \mathcal{H}$ デアリユツ

A. スベテノ A_ν ハスベテノ $\mathcal{M}_N = \emptyset$ ツテ *reduce*
 サレル。

B. スベテノ A_ν ハスベテノ $\mathcal{M}_N$ デ *bounded* デア
 ル。

C. *Zero measure* ノ *t-set* フノダイテ、 $\mathcal{P}_t$
 ハ高々

$$(B) \quad \mathcal{P}_t = \sum_N \mathcal{P}_{N,t} \quad (\mathcal{P}_{N,t} \in \mathcal{M}_N)$$

ナル展開フモツ。コレハ、無限項ヨリナルトスルモ、スベテ
 ノ $t = \text{ツイテ}$ *conv.* スル。

D. 各 $\mathcal{P}_t^N$ ハ *abstract Cauchy's series* = ヨツ
 テ

$$\mathcal{P}_t^N \sim \sum_{g=1} e^{i\beta_{N,g}t} \psi_{N,g}$$

ナル展開ガナリヲツ。($\psi_{N,g} \in \mathcal{M}_N = \emptyset$ テ $t = \text{モ}$ ハ、無関
 係、 $\beta_{N,g}$ ハ実数デアル。) 而シテ各 $\mathcal{P}_t^N$ ハ *abstract almost*
periodic デアル。⁽¹⁰⁾

E. $\beta_{N,g}$ = 関シテハ

(10) *abstract Cauchy's series, abstract almost*
periodicity ノ意味ハ *Part II* デ述ベル。

$$(15) \sum_{\nu=0}^n G_{\nu}(i\beta_{N,q}) A_{\nu} \psi_{N,q} = 0,$$

$$N = 1, 2, \dots; q = 1, 2, \dots$$

が成立スル。

コレハ、[C] = 於ケル Theorem I = 相當スルト見ラレヨウ。尚次ノコトヲ remark シテオキタイ。特 = kernels $G_{\nu}(\Delta)$ が有限個ノ不連続点カラナル step-function デアルトキニハ、假定 C) ノ成立スルコトハイフマデモナイ。

依ツテ、吾々ノ上 = 掲ゲタ定理ハ difference. eq. ノ almost periodic solution = 關スル Bochner ノ定理ノ擴張トモ見サレル。Bochner ノ定理 = ヨレバ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y(x + \delta_n) = 0$$

ノ解 = シテ、bounded ナリ且ツ uniformly continuous ナルハ、必ズ almost periodic ナル。

尚、Bochner ノ定理ハ、⁽¹¹⁾ difference-diff. eq.

- (11) S. Bochner: über gewisse differential-und allgemeine gleichungen deren lösungen fast periodisch sind. I. Teil. Der existenzsatz., Math. Ann. 102 (1929) II Teil, Math. Ann. 103 (1930). コレヲノ論文ヲ、夫々 [B₁], [B₂] ヲ以テ引用スル。

ニ関スルモノデアツテ、今ノベタノハ、ソノ *special case* ニツイテデアル。コノ一般定理ニ對應スルモノヲ求めルノハ、筆者ニハ不成功デアツタコトヲ附記シナケレバナラナイ。⁽¹²⁾

4. 定理ノ証明ノ *details* = 入ルニ先ツテ、ソノ *outline* ヲ述ベテ置カウ。先ヅ、吾々ハ *hy* ノ *specializations* = 関スル [C] ノ方法⁽¹³⁾ ヲ或程度マデ適用シウルコトハ明カデアル。依ツテ次ノ如キ高度ニ特殊化サレタニツノ場合ヲ論ズレバヨイコトハ明カデアロウ。

- (12) [C] p. 272 ノ補助定理4ノ証明が一般的 = *linear translatable diff. eq* = 適用サレナイコトヲ讀者ハ容易ニ御了解ニナラレルコトト思フ。ヨツテ

$$\sum_{\nu=0}^n A_{\nu} \left(\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}} I_{\nu,t} p_t \right) = 0$$

或ハ

$$\sum_{\nu=0}^n A_{\nu} (I^{\nu} I_{\nu,t} p_t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_{\mu} t^{\mu} \left(\begin{array}{c} I^{\nu} \text{ハ } \nu\text{-iterated} \\ + \text{積分} \end{array} \right)$$

ヲ論ズルコトニハ、 I_{ν} ニ関シテ、假定が多クナルデアロウ。コノ問題ハ残ツテキル。

- (13) *Part II, Proof of Theorem I* [C] p p. 272—275ヲ見テレヨ。

[C] *Specializations* 4 (p. 275)ニ導ク考察ハ、吾々ノ場合ニモ直チニ移シウル。何者、ソレハ $A_0, A_1, \dots, A_n$ ノミニ関シテノ議論デアリ、 $A_0, A_1, \dots, A_n$ ニ関シテハ、[C] ト同シ假定デコノ談話ハ出發シタノデアレカラデアル。

Case I. h_y が一次元 + ルトキ。

Case II. h_y が $L_2 M$ トシテ realized + レヲ居リ

$$(16) \quad A_\nu f(x) = F_\nu(x) f(x) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$$

トナリ、茲ニ $F_\nu(x)$ が皆有界 + complex-valued + Baire ノ函数デアリ、方程式 (4) ハ

$$(17) \quad \sum_{\nu=0}^n F_\nu(x) \int_{\alpha}^{\beta} g(t+\Delta, x) dg_\nu(\Delta) = 0$$

が measure zero ノ t -set T ノダイテ、スベテノ (t, x) = 関レテ成立シ、 T = ナイ各 t = 関シテ measure 0 ノ x -set $\mathcal{T}$ ノダイテ成立スルトイフ場合

サテ、Case I = 関シテハ、Bochner ノ定理ヲ援用、ソノ方法ヲ倣ハ、バヨイ。

Case II = 関シテハ、(17) = 関シテ更ニ reduction ヲ施スノデアアル。ソシテ更ニ specializations ヲ施スコト = ヲツテ $\mathcal{P}(t, x)$ = 對シテハ product space (t, x) = 於ケル、ソレノ Cauchy 級数ヲ定義出來ル。コレ = ヲツヲ始メテ (筆者ノ考ヘテハ) Bochner-Neumann ト同様ノ議論ヲ続ケ得ル端緒 = 就ケルノデアアル。読者ニ直チニ、御了解下サレルコトと思フガ、(17) ナル方程式ヲトク = アタツテノ主ナル困難ノ一ツハ、 M ノ各 fixed x (但シ、場合 = ヲツテ measure zero ノ x -set ノダイク) = 對スル λ = 関スル方程式

(14) footnote (12) 所掲

$$(18) \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu}(\infty) G_{\nu}(\lambda) = 0$$

が一般=無限デアルトイフ点=存スル。コノコトが [C] 中、
277—280 = 於ケル Bochner—Neumann ノ議論ヲ
ソノマ、襲踏スルコトヲ拒ムヤウ=思ハレル。コノヲ避ケテ
進行スルタメ、Cauchy 級数論ノ諸結果ト、Wiener ノ
方法⁽¹⁵⁾トヲ併用シ=見ヨウト思フ。ソノ結果 Hilbert space
ノ要素 a_n ヲ係数トシタ級数

$$\sum a_n e^{i\beta_n t}$$

(β_n ハ t = 無関係ナ実数) ヲ考ヘルコト=ナル。コレマデ
ノコトヲ Part I = 於テ示サシ。

Part II = 於テハ、カ、ル級数ヲ一般的 = (定理
ノ証明ノ必要以上 = 一般 = シテ) 考察シテオクコト = スル。
即チ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\delta=0}^{m_n-1} a_{n,\delta} t^{\delta} e^{\lambda_n t}$$

ナル形 (コノ $a_{n,\delta}$ ハ normalized Banach
space ノ元, λ_n ハ複素数) ノ所謂 abstract Cauchy
series ナルモノヲ導入シテ基本性質ヲ述ベテミタイ。ソノ
結果ヲ利用スルコト = ヨツテ Part III = 於テ定理ノ証明ヲ完
了スルノデアイル。

(15) N. Wiener: The operational calculus, Math.
Ann. 95 (1926)