



Title	Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation (II)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 138, p. 89-101
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74536
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

611. Hilbert 空間 = 於ケル Linear translatable functional equation (II)

北川 敏 男(阪大)

(I) = 於テハ, 問題ノ起リトソレ = 對スルーツノ結果トヲ述ベタ。 (II) 以下ハソノ結果ノ証明デアル。ソレ = 先立ツテ §3 假定 e) ハ次ノ如ク書キ改メテオク: 假定 e) I_t^ν ハ I_t テレ回 iterate シタ Operation ヲ意味シ, I_t ノ Weighting function ハ有限區間 $[\alpha, \beta]$ = distribute サレテアリ。

$$(10) \quad G(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda t} dq(t)$$

トオクトキ

$$(11) \quad G(\lambda) = \sum_{\Delta=1}^m A_{\Delta}(\lambda) e^{\lambda \alpha_{\Delta}}$$

コゝ =

$$(12) \quad A_{\nu, \Delta}(\lambda) = a_{\nu, \Delta} + \epsilon(\lambda)$$

$\epsilon(\lambda)$ ハ $|\lambda| \rightarrow \infty$ ト共 = 一樣 = 零 = ナル函数ヲ表ハス。

($\Delta = 0, 1, 2, \dots, n$) デアル。($m = /$ デアルカモ知レヌ) [以上]

I. 特殊化

[注意]: コゝデハ記述ヲ簡單 = スルコトガ望マシイカラ $G(\lambda) = e^{\lambda}$

トイフ極メテ特殊ナ場合 = ツイテ証明ヲノベル。然ル後一般ノ場合ヲ附言スルコト = スル。

5. §4 = 述べ々如ク、Cases I & II ヲ論ズレバ足り
ル。Case I ハ簡單ニ處理シタル。by が一次元ノトキニハ、
 $\varphi(t) = a(t)\psi_0$ ナル numerically-valued ナ函数
 $a(t)$ = 關スル Linear translatable functional
equation = ナルカラ、定理ノ成立ハ容易ニ示サレル。頁
數節約上之ヲコトテハ省ク。

6. ソコデ Case II = 移ラウ。x ヲ固定シテ、 λ = 關
スル方程式

$$(19) \sum_{\nu=0}^n F_{\nu}(x) (G(\lambda))^{\nu} = 0 \quad (G(\lambda) \equiv e^{\lambda})$$

ヲ x = 於ケル characteristic equation ト呼ビ、コレ
ノ全体ヲ $\mathcal{C}$ = 於ケル (19) ノ λ -spectrum トイヒ、
 $S_x(\lambda)$ デ示ス。

今変換

$$(20) G(\lambda) \equiv e^{\lambda} = \rho$$

ヲ施ス。然ルトキ、(19) ヲトクコトハ、(20) ト

$$(21) \sum_{\nu=0}^n F_{\nu}(x) \rho^{\nu} = 0$$

トヲトクコトニ歸スル。コノ形ノ方程式ニ關シテハ [C] p.
278 = 於テ論ジタ所デアツテ、ソノ結果ヲコトニ援用スルト
次ノ特殊化ヲウル。

但シ、集合 $S_x(\rho)$ ノ極座標系 $(R, @)$ ニ射影ヲ夫
々 $R[S_x(\rho)]$, $@[S_x(\rho)]$ デ表ハス。(勿論コレハ $\mathcal{C}$ ト
共ニ一般ニカサレ集合デアル)

[特殊化1] “Case II = 於テハ、次ノ如ク假定シテモ構ハナイ; 即チ函数 $r_k(x)$, $\theta_j(x)$, 実数 $\bar{r}_k$, $\bar{\theta}_j$, $\bar{\delta}$ ($k=0, \pm 1, \dots, \pm n$; $j=1, 2, \dots, n$) が存在シテ次ノ條件ヲ充スト假定シテモ構ハナイ。

(1°) (21) ノ方程式 = ツイテノ $R[S_{\infty}(g)]$, $@[S_{\infty}(g)]$ ハ各 $x =$ ツイテ夫々 $\{r_k(x)\}$ ($k=0, \pm 1, \dots, \pm n$), $\{\theta_j(x)\}$ ($j=1, 2, \dots, n$) ノル集合 = 含マレテキル。

(2°) x ガ M 上 動クトキ常ニ

$$\begin{aligned} |r_k(x) - \bar{r}_k| < \bar{\delta} & \quad |\theta_j(x) - \bar{\theta}_j| < \bar{\delta} \\ \bar{r}_{k+1} > \bar{r}_k + 4\bar{\delta} & \quad \bar{\theta}_{j+1} > \bar{\theta}_j + 4\bar{\delta} \end{aligned}$$

更ニ $r_0(x) = \bar{r}_0 = 0$.”

サテ今 $G(\lambda) \equiv e^{\lambda}$ トシタカラ (22) ノ根ハ

$\text{Log}_e r_k(x) + i(\theta_j(x) + 2m\pi)$ ノ形 = カイタモノ = 含マレル。 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ デアル。ソコヲ変換 (20) = ヲツテ、特殊化1カラシテ次ノ特殊化2ニ至ル。

[特殊化2] “Case 2° = 於テハ、次ノ如クナツテキルト假定シテモヨイ。即チ S_{∞} ノスベテノ元ヲベ、絶對値並ニ偏角ノ順ニ並ベルトキ

(i) 有界可測函数ノ三系列

$$\lambda_i(x) \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad r_k(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$\beta_j(x) \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

(但シ 並ニ $\lambda_i(x)$ ハ複素数値, $\beta_j(x)$, $r_k(x)$ ハ實数値デアル)

(ii) 實数列ノ二組

$$\overline{\gamma}_k (k=0, 1, 2, \dots) \quad \overline{\beta}_j (j=1, 2, 3, \dots)$$

並び = 正数 $\overline{\delta}$.

(iii) 整数列ノ二組

$$h(i), j(i), (i=0, 1, 2, 3, \dots)$$

が存在シテ 次ノ性質ヲモツト假定シテモヨイ。ソノ性質トハ

(1°) M ノ各 x = 對シテ、 $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x), \dots$ ハ 絶對値並 = 偏角ノ順序 = 並ンデキル。

(2°) M ノ各 x = 對シテ、 S_x ハ $\{\lambda_i(x)\} (i=0, 1, 2, \dots)$ ナル集合 = 含マレル。(必ズ シモ一致スルトイフノデハナイ)

$h=0, \pm 1, \pm 2, \dots, j=1, 2, 3, \dots$ = 對シテ

$$(3^\circ) |\gamma_k(x) - \overline{\gamma}_k| < \overline{\delta}, \quad |\beta_j(x) - \overline{\beta}_j| < \overline{\delta}$$

$$\overline{\gamma}_{k+1} > \overline{\gamma}_k + 4\overline{\delta}, \quad \overline{\beta}_{j+1} > \overline{\beta}_j + 4\overline{\delta}$$

尚 $\gamma_0(x) = \overline{\gamma}_0 = 0$ 、而シテ各 $\lambda_i(x)$ = 對シテハ、 $x \in M$ ナルトキ常 =

$$\lambda_i(x) = \gamma_{h(i)}(x) + i\beta_{j(i)}(x)$$

トナル様ナ $h(i), j(i)$ カ對應スル。

(4°) x ガ M ヲウゴク間、 $\lambda_n(x)$ ハ中心 $\overline{\gamma}_{h(n)} + i\overline{\beta}_{j(n)}$ 半径 $2\overline{\delta}$ ノ円 $C_{\overline{\gamma}_{h(n)}, \overline{\beta}_{j(n)}, 2\overline{\delta}}$ ノ内部 = トスマル。

コノ *Specialization*ノ結果トシテ、自然数 n ヲ如何 = アタヘテモ、 λ -plane 上 = contour C ヲ x = 無関係 = エラビ、 x ガ M ヲ動ク間、(i) C ハ $\lambda_0(x), \dots$,

$\lambda_n(x)$ ノ 内部 = オナメ (ii) $\lambda_{n+1}(x), \lambda_{n+2}(x), \dots$
ハ悉ク $\mathbb{C}$ ノ 外部 = アリ (iii) $\mathbb{C}$ ト $\{\lambda_n(x)\}$ トノ 距離ハ x
= 無関係ナ一定正数ヨリ大デアル—— トイフマウ = 出来ル。

今便宜上

$$(22) \quad \Lambda_{\xi}^x \left[\varphi(\xi, x) \right] \equiv \sum_{\nu=0}^n F_{\nu}(x) \int_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi+t, x) d g_{\nu}(\xi)$$

トオキ、上ノ如クトツテ $\mathbb{C} = \mathbb{C}'$ イテ

$$(23) \quad S_{\mathbb{C}}^x(t, t_0; f) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{\lambda t}}{G(x, \lambda)} \Lambda_{\xi}^x \left[e^{\lambda \xi} \int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{-\lambda \eta} \varphi(\eta, x) d\eta \right] d\lambda$$

ヲ M ノ 各 $x = \mathbb{C}'$ イテツクル。然ルトキコレガ

$$(24) \quad \sum_{i=0}^{N(x)} \sum_{p=0}^{n_i-1} a_{i,p}(x, t_0) t^p e^{\lambda_i(x) t}$$

トナルベキコトハ明カデアアル。コノ =、 $a_{i,p}(x, t_0)$ が可
測 = シテ、又 $G(x, \lambda_i(x)) \neq 0$ ナル如キ点 $x \in M$ = 於テハ、
 $a_{i,p}(x, t_0) = 0$ トナルベキコトモ論ヲ俟テナイ。(16) 吾人ハ
(23) ヲ以テ、 (t, x) 空間 = 於ケル *Cauchy* 級数ノ $\mathbb{C}$ 一切
断ト呼ブコト = シマウ。(17) $\{\mathbb{C}_r\}$ ヲ上ノ如キ $\mathbb{C}$ カラナル系列デ
 $\mathbb{C}_r$ ハ $\mathbb{C}_{r+1}$ ノ 内部 = 含マレ、 $r \rightarrow \infty$ ノ トキ = ハ 全平面 =
擴ガル様 = トレバ

(16) $G(x, \lambda_i(x)) = 0$ ナル x = 對シテモ、 $a_{i,p}(x, t_0)$ ノ アルモ、ハ
零デアルカモ知レナイ。コノ点 *Cauchy* 級数展開法ハ *Fourier*
級数ノ ソレ = 近ク、*Almost periodic function* ノ 展開ト
ハ違ッテキル、

(17) [I] p. 237 参照。

$$(25) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n_i-1} a_{i,p}(x, t_0) t^p e^{\lambda_i(x)t}$$

が得ラレマウ。

6. 以上, 多少ノ工夫ノノチ、トモカク $[C] =$ 於ケルマウナ工作ヲ施シテ進ンデキタ。コレカラハ, $\varphi(t, x)$ ガ方程式ヲ消スコト, 有界デアール事, 更ニ *Compact* デアールコト等ヲ逐次使用シテ、次ノ特殊化3ニ導キウルコトヲ示サウト思フ。

補助定理2: 特殊化2ニ於テ, $a_{p,\nu}(x, t_0)$ ハ M ノ殆ンドスベテノ $\mathcal{C} =$ ツイテ、 $t_0 =$ 無関係デアール。

証明: 任意ノ t_0', t_0'' ヲ考ヘテ、 $S_e^x(t, t_0'; \varphi) - S_e^x(t, t_0''; \varphi)$ が零ニナルコトヲイヘバヨイ。コノテ、 $\varphi(t, x)$ が解ナルコト即チ $\Delta_{\xi}^x[\varphi(t+\xi, x)] = 0$ ($-\infty < t < \infty =$ テ; 殆ンドスベテノ $\mathcal{C} =$ ツイテ) ナルコトヲ使用スル。

補助定理3: $h(i) \neq 0$ ナラバ、特殊化2ニ於テ、殆ンドスベテノ $\mathcal{C} =$ ツイテ

$$a_{i,p}(x, t_0) = 0$$

証明: $G(x, \lambda_i(x)) \neq 0$ ナルマウナ点 $x = \tau$ ハ, $a_{i,p}(x, t_0) = 0$ トシタカラ問題ハナイ。 $G(x, \lambda_i(x)) = 0$ トシ、簡単ノタメ、單根即チ $G'_\lambda(x, \lambda_i(x)) \neq 0$ ナルマウナ x ヲ考ヘヨウ。(複根デモ次ノ議論ヲ少シ *modify* スレバヨイ) スルト

$$a_{i,0}(x, t_0) = \frac{1}{G'_\lambda(x, \lambda_i(x))} \Delta_{\xi}^x \left[e^{\lambda_i(x)\xi} \int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{-\lambda_i(x)\eta} \varphi(\eta, x) d\eta \right]$$

先づ $h(i) > 0$ トシヨウ。シカルトキ = ∞ , t_0 ヲ 正 = 充
分大キク トレバ

$$\left| e^{\lambda_i(x)\xi} \int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{\gamma_i(\omega)\eta} g(\eta, x) d\eta \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{(\bar{\gamma}_k(i)-\delta)(\xi-\eta)} |g(\eta, x)| d\eta \right|$$

コゝ = $\bar{\gamma}_k(i) - \delta > 0$ ナルコト = 注意セヨ。サテ、コレカ
ラ

$$\int_M \left| \int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{(\bar{\gamma}_k(i)-\delta)(\xi-\eta)} |g(\eta, x)| d\eta \right|^2 dx$$

$$\leq \frac{|e^{-2(\bar{\gamma}_k(i)-\delta)t_0} - e^{-2(\bar{\gamma}_k(i)-\delta)(\xi-t_0)}|}{2(\bar{\gamma}_k(i)-\delta)} \left| \int_{t_0}^{t_0+\xi} \|g_\eta\|^2 d\eta \right|$$

ヲ得ル。コゝ = 於テ $t_0 \rightarrow \infty$ トスレバ, $\|g_t\|$ が有界ナル
コトカラ上式ハ零 = ナル。従ツテ

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \|a_{i,0}(x, t_0)\| = 0$$

トナラネバナラス。シカル = $a_{i,0}(x, t_0)$ ハ殆ンドスベ
テ $x = \infty$ キ $t_0 = \infty$ 無関係ナモノデアアル。

$\|a_{i,0}(x, t_0)\|$ 又然リ。ヨツテ上式カラ $\|a_{i,0}(x, t_0)\|$
又零ナラネバナラス。

以上 = 於テハ $h(i) > 0$ トシタガ、 $h(i) < 0$ ナラバ
 $t_0 \rightarrow -\infty$ = シテマレバヨロシイ。 (証明了)

今、 $S_e^x(t, t_0; g)$ トハ少シクコトナツタ

$$\tilde{S}_e^x(t, 0; g) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Delta_{\frac{x}{2}}^x \left[e^{\lambda \xi} \int_0^\xi g(t+\xi, x) e^{-\lambda \eta} d\eta \right]}{G(x, \lambda)} d\lambda$$

ヲ導入スル。

補助定理 4: *Specialization 2* = 於 τ ハ, M
 = 属スル各 λ ドスベテノ $\alpha = \tau +$

$$\widetilde{S}_e^\alpha(t, 0; \varphi) = S_e^\alpha(t, 0; \varphi)$$

而シテ、 $\widetilde{S}_e^\alpha(t, 0; \varphi)$ ハ ($\varphi(t, x)$ ト同様 =) L_M^2 = 於
 イテ *uniformly continuous* 且ツ *compact* ナ
 アル。

証明: 前半ハ、補助定理 2 ト同様 = 証明サレル。後半
 ヲ示スノ = ハ、

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{\lambda}{\xi}}^\alpha \left[e^{\lambda \xi} \int_0^\xi \varphi(t+\eta, x) e^{-\lambda \eta} d\eta \right] \\ = \sum_{\nu=0}^n F_\nu(x) e^{\lambda \nu} \int_0^\nu \varphi(t+\eta, x) e^{-\lambda \eta} d\eta \end{aligned}$$

ノ形ナアリ、コレハ、 L_M^2 = 於テ *uniformly continuous*
 且ツ *compact*; コレヲ有界ナトコロ = アル正則曲線 $\mathcal{C}$ /
 上ニ積分スルコト = ヨリ明ラカデアル。

次 =、N. Wiener = 從ヒ、 $\varphi_{\sigma, \delta}(x)$ ハ $-\infty < x < \infty$
 ノスベテノ点デ無限回微分可能ナ

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \quad \varphi_{\sigma, \delta}(x) = 1; \quad \sigma - \delta \leq x \leq \sigma + \delta \\ 2^\circ \quad \varphi_{\sigma, \delta}(x) = 0; \quad x > \sigma + 2\delta \\ 3^\circ \quad \varphi_{\sigma, \delta}(x) = 0; \quad x < \sigma - 2\delta \\ 4^\circ \quad \varphi_{\sigma, \delta}^{(p)}(\sigma \pm 2\delta) = \varphi_{\sigma, \delta}^{(p)}(\sigma \pm \delta) = 0 \quad (p \geq 1) \end{array} \right.$$

ナラシメ、次ノ如クオク。

$$W_{\sigma, \delta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\sigma, \delta}(u) e^{i\lambda u} du$$

$$f_{\sigma, \delta}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta, x) w_{\sigma, \delta}(t + \Delta) d\Delta$$

補助定理5. $v(t, x)$ は $-\infty < t < \infty$ で定義され、
 $t = \text{const}$ として、 L_M^2 に属スルベシ。 $\|v_t\| = \sqrt{\int |v(t, x)|^2 dx}$
 topology によって t の函数トシテ *uniformly continuous*
 デアリ、 $M, v_t (-\infty < t < \infty)$ の値域集合は *compact*
 デアルベシ。

$w(t)$ は複素数値函数トシテ $\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)| dt < \infty$ トスル。

然ルベキ

$$(i) \quad \eta(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t + \Delta, x) w(\Delta) d\Delta$$

$$(ii) \quad \Lambda_{\xi}^x \left[e^{\lambda \xi} \int_0^{\xi} \eta(t + \xi, x) e^{-\lambda \xi} d\xi \right]$$

又同様 = *uniformly continuous* 且 $\forall$ *compact*
 デアル、(ii) は

$$(iii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_{\xi}^x \left[e^{\lambda \xi} \int_0^{\xi} v(t + \Delta + \xi, x) e^{-\lambda \xi} d\xi \right] w(\Delta) d\Delta$$

= 等シクナル。

証明: (i) は [C] に属スルベシ。 (ii), (iii) は容易。

補助定理5. 特殊化2ノ假定ノもとに於て、 $\mathcal{C}_0, \bar{f}_n, 2\delta$ の
 代り =、單 = $\mathcal{C}$ トカケバ

$$(i) \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j}(x) t^j e^{i\beta_n(x)t}; \quad [h(i)=0; j(i)=n]$$

$$(ii) \quad S_{\mathcal{C}}^x(t, 0; \varphi)$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} W_{\beta_n, 2\delta}^{-}(t+\sigma) S_{\mathcal{C}}^x(\sigma, 0; \mathcal{P}) d\sigma$$

$$(iv) S_{\mathcal{C}}^x(t, 0; \mathcal{P}_{\beta_n, 2\delta})$$

ノ四ツハ悉ク相等シイ、

証明: 特殊化 2 並ビニ $\mathcal{C}$ ノ定義ニヨリ、(i) ハ (ii) = 等シイ。

[C] Lemma 8 (p.280) = ヨツテ

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\|S_{\mathcal{C}}^x(t, 0; \mathcal{P})\|}{|t|^{\alpha}} < \infty$$

依ツテ、殆ンドスベテノ x = 對シテ

$$|S_{\mathcal{C}}^x(t, 0; \mathcal{P})| < B(x)(|t|^{\alpha} + 1)$$

ナル $0 < B(x) < \infty$ が得ラレル。ソコデ Wiener ノ理論ニ依ツテ積分 (iii) が存在シテ、コレが (ii) = 等シイ。(iii) ト (iv) トハ積分ノ順序交換ニヨツテ得ラレル。

補助定理 6. $\rho \geq 1$ トス。然ルトキニハ、特殊化 3 ノモトデハ、殆ンドスベテノ x = 對シテ $\alpha_{i, \rho}(x) = 0$ デアル。

証明: 補助定理 3 = ヨツテ $j(i) = 0$ デアルヌナ $\alpha_{i, \rho}(x)$, ミヲ考ヘレバヨロシイ。Lemma 5 = ヨリ、ソコノ (i) ハ (iv) = 等シイ。(iv) ハ補助定理 4 及ビ 5 = 依ツテ $-\infty < t < +\infty$ = 於テ、 L_M^2 , topology , 意味デ有界デアル。依ツテ Lemma 8 in [C] p.280 = ヨツテ、 $\rho \geq 1$ = 對シテハ、 $\alpha_{i, \rho}(x) = 0$ が殆ンドスベテノ x = ヲイテ成立セネバナラス。

依ツテ、補助定理6マテノ結果トシテ、 $\mathcal{P}(t, x), (t, x)$
 =関スル *Cauchy*級数ハ

$$\mathcal{P}(t, x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu,0}(x) e^{i\beta_{\nu}(x)t}$$

ノ形ニナルコトヲ知ル。

補助定理7 相素ナル可測集合系 $M^*, M_1, M_2, \dots$
 $\dots, M_n, \dots$ ガアツテ、各 $\beta_{\nu}(x)$ ハ各々、スベテノ M_n
 デ *const.*デアリ、 M^* -族ヲハ殆ソド至ルトコロデ、各々
 $a_{\nu,0}(x) = 0$ デアルトイフマウニ、 $M = M^* + M_1 + M_2 + \dots$
 ニスルコトガ出来る。

証明: 補助定理6ニヨリ

$$S_{\mathcal{C}_i}^x(t, 0; \mathcal{P}) = a_{\nu,0}(x) e^{i\beta_{\nu}(x)t}$$

トナル。補助定理4ニヨリ、左辺ハ $-\infty < t < \infty$ デ L_M^2 ノ
*strong topology*デ *compact*デカラ [C] Lemma
 11 p.283ニ由ツテ

$$M = M_{\nu}^* + M_{\nu,1} + M_{\nu,2} + \dots + M_{\nu,n} + \dots$$

ナル (ν ニ *depend*シタ) 上ノ性質ヲモツタワケカタ ($\mathcal{D}_{\nu}$)
 ガアル。 $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ デアツテ無限分デアルケ
 レドモ、 $\beta_{\nu}(x)$ ノ定義ニカヘテ考ヘテミルト、

$\beta_{\nu}(x)$ ノ定義カラ、 $G(x, i\beta_{\nu}(x)) \neq 0$ デアルマウナ ∞
 デハ、 $a_{\nu,0}(x) = 0$ デアルシ、 $G(x, \beta_{\nu}(x)) = 0$ デア
 ルマウナ ∞ デハ、 $a_{\nu,0}(x) = 0$ デアルシ、 $G(x, \beta_{\nu}(x)) = 0$ デア
 ル様ニ ∞ ニ對シテハ、即チ

$$\sum_{k=0}^m F_k(x) e^{k\beta_\nu(x)} = 0$$

だから前ノ場合ハ問題ハナク、後ノ場合ニハ $\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_n(x)$ ガアツテ

$$\beta_\nu(x) = \theta_{k(\nu)}(x) + 2m(\nu)i\pi$$

トナルヤウナ $1 \leq k(\nu) \leq n$, $m(\nu)$ ガキユル。だから、
 今ケ方 $[D_\nu]$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ノうち相異なるモノハ有
 限箇シカナイ。依ツテ、ソノ相異なる有限箇ノワケ方全部ヲ
 一所ニシテ出来るワケカタヲ考ヘルト、ソレガ求ムルワケ方
 デアルコトガワカル。

以上ノ結果ニヨリ、吾々ハ次ノ如キ最後ノ特殊化ニ到達
 スル。

[特殊化 3] “特殊化 2ニ於テ

$$g(t, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) e^{i\beta_n t}$$

ナル對應ガツキ。(コトニ、 $\psi_n(x) \in L_2^M$, β_n ハ実数ヲ
 $t = \varepsilon$, $\infty = \varepsilon$ 無関係) 次ノヤウニナツテキルト假定シテモ
 ヨイ。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \sum_{\nu=0}^m e^{i\beta_\nu t} A_\nu \psi_n(x) = 0 \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} 2^\circ \text{ 常数 } F_0, F_1, F_2, \dots, F_n \text{ ガアツテ} \end{array} \right.$

$$\Lambda g_t \equiv \sum_{\nu=0}^m F_\nu g(t+\nu)$$

ト書クトキ、 $\Lambda g_t = 0$ ($-\infty < t < \infty$) デアリ、上ノ展開
 ハコノ Λ = 関スル Cauchy 展開ニナツテキル。”

証明: 1° = ツイテハ証明ヲ要シナイデアロウ。2° = 関
 シテハ, $i\beta_\nu(x)$ ハ $\sum e^{ik\beta_\nu(x)} F_\nu(x) = 0$ デアル
 トシテヨイデアアルカラ $\beta_\nu(x) = \beta_\nu(\text{常数}) = \text{對シテハ}$,
 $F_\nu(x) = F_\nu(\text{常数})$ ト考ヘテヨイコト = 注意シサヘスレバ
 充分デアアル。