



Title	Verzerrungssatz $\vdash$ Minimumprinzip
Author(s)	早田, 文一
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 138, p. 106-115
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74538
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

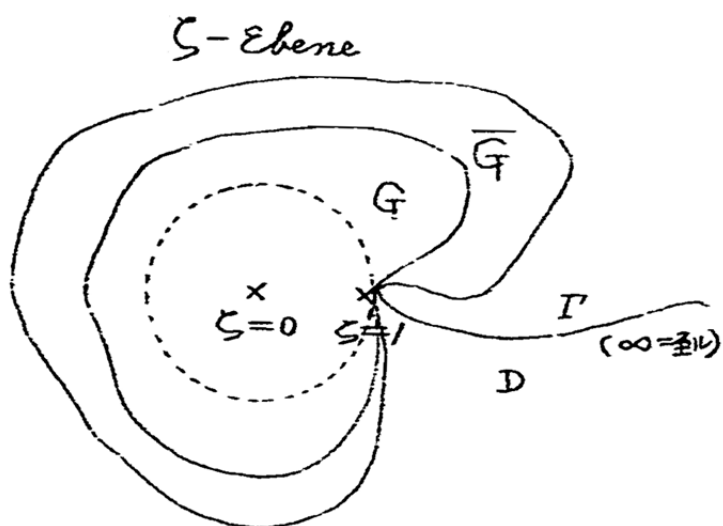
<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

613. Verzerrungssatz と Minimumprinzip

早 田 文 一

ζ 平面 = 単位円ヲ含ミ無限点 $\zeta = \infty$ ヲ内点トシテ含マ
ス 単一連結ナ領域 G ヲ考ヘル。更ニ G ハ $\zeta = 1$ ヲ Randpunkt
ニ持ツト假定スル。今 $\zeta = 1$ ト $\zeta = \infty$ トヲ G 内ニ入ラス 單
一ナ Jordankurve Γ ヲ結ビ Γ = 沿フヲ Schlitz
ヲ入レル。全有限平面 = Schlitz Γ ヲ入レタ領域ヲ D ト
スル。



G ヲ z 平面ノ 単位円
= 一対一 = 寫像シ原点
同志ヲ對應セシメル函
数ヲ $f(\zeta)$ トスルトキ
 $|f'(0)|$ が G ノ 拡張 =
從ヒ如何ニ変化スルカ
ヲ見ヨウトスル。ソノ
タメ G ト 同シヤウナ性

質ヲ有スル他ノ領域、即チ単位円 $|\zeta| < 1$ ヲ含ミ $\zeta = \infty$ ヲ
内点トシテ含マナイ領域 $\bar{G}$ ヲ作り、猶 $\bar{G}$ ハ G ヲ含ムヤウニ
スル。(G ト $\bar{G}$ トハ Randpunkte ヲ共有シテモ差支ナイ
ガ G ノ 内点ナラザル $\bar{G}$ ノ 内点が存在スルモノトスル)

$\bar{G}$ ノ 寫像函数ヲ $\bar{f}(\zeta)$ トスル。 $\zeta = 0$ ノ G 及ビ $\bar{G}$ = 関
スル Green 函数ハ夫々 $-\log|f(\zeta)|$, $-\log|\bar{f}(\zeta)|$ デア
ル。コレヲノ差 $\log|f(\zeta)| - \log|\bar{f}(\zeta)|$ ヲ G = 於テ考ヘ

ルト、コレハ先ヅ G ノ内部ニ於テ至ルトコロ正則デアツテ
 G ノ Randpunktニ於テ $\log|f(z)|=0$, $\log|\bar{f}(z)|\leq 0$
 デアル。ヨツテ調和函数ノ minimum = prinzip = ヨ
 リ G デ至ルトコロ

$$\log|f(z)| - \log|\bar{f}(z)| \geq 0$$

即チ

$$|f(z)| \geq |\bar{f}(z)|$$

$G, \bar{G}$ ノ代リニ單位円 $|z| < 1$, G ヲ置イテモ或ハ $\bar{G}$, D ヲ
 置イテモソレゾレノ場合ノ函数ニツキ同様ナ不等式ヲ得ル。
 ヨツテ單位円ノ寫像函数ヲ $|z|=|z'|$, $z=g(z')$ トスレバ

$$|z'| \geq |f(z)| \geq |\bar{f}(z)| \geq |g(z)| \quad |z| < 1$$

コノ不等式ヲ $|z|$ ガ割ツテ $z \rightarrow 0$ ナラシムレバ

$$1 \geq |f'(0)| \geq |\bar{f}'(0)| \geq |g'(0)|$$

コノ等号ノ成立スルノハニツノ領域ガ一致スル場合ニ限ル。

何トナレバ例ヘバ中間ノニツ $f(z), \bar{f}(z)$ ヲ考ヘレバ

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

$$\bar{f}(z) = \bar{c}_1 z + \bar{c}_2 z^2 + \dots$$

トスレバ

$$\log|f(z)| = \log|c_1| + \log|z| + u(z)$$

$$\log|\bar{f}(z)| = \log|\bar{c}_1| + \log|z| + \bar{u}(z)$$

$u(z), \bar{u}(z)$ ハ夫々 $G, \bar{G}$ ニ於テ正則ナ調和函数ガ $z=0$
 デ 0 ニナル。

ヨツテ $|f'(0)| = |\bar{f}'(0)|$ トスレバ

$$\log|f(z)| - \log|\bar{f}(z)| = u(z) - \bar{u}(z)$$

アアルが、コレハ上ニ述ベタメウ = *Minimum = Prinzip*
 = ヨリ G 内ニテ 凡トナラナイノ アアルカラ $\zeta=0$ デ 0 トナレバ
 G 内ニテ 常ニ 0 ナケレバナラナイ。 $|f(\zeta)| = |\bar{f}(\zeta)|$
 ヨリ G ト $\bar{G}$ トハ一致シナケレバナラナクナル。ヨツテ次ノ結
 果ニ達スル。

結果¹⁾: ζ 平面ノ $\zeta=1$ ト $\zeta=\infty$ トヲ 単位円内ニ入テ又 単一
 ナ *Jordanbogen* デ結び、コレニ沿フテ *Schlitz* フ
 入レル。出来テ G 内ヲ D トスル。別ニ $\zeta=1$ ヲ通過
 シ、単位円ヲ含ミ $\zeta=\infty$ ヲ含マナイ領域ヲ $G, \bar{G}$ トスル。
 $D, G, \bar{G}$ ヲ夫々他ノ平面上ノ 単位円ニ寫像シ且ツ 原点同
 太ヲモ對應セシムル函数ヲ夫々 $g(\zeta), f(\zeta), \bar{f}(\zeta)$ トス
 ル。 G が $\bar{G}$ = 含マレルトキ次ノ不等式が成立スル。

$$|\zeta| \geq |f(\zeta)| \geq |\bar{f}(\zeta)| \geq |g(\zeta)|$$

$$(1) \dots\dots 1 \geq |f'(0)| \geq |\bar{f}'(0)| \geq |g'(0)|$$

コニ等号ノ成立スルノハニツノ G 内ガ一致スル場合ニ
 限ル。($|\zeta|$, 1 ハ ζ 平面上ノ 単位円ニ相當スル) I' ガ特ニ
 $\zeta=1$ カラ 實軸ノ正ノ部分ニ沿ツテ ∞ ニ至ル *Schlitz* デ
 アルトキニハ

$$\xi = g_0(\zeta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \zeta}}{1 + \sqrt{1 - \zeta}} \quad (\text{Koebe, Extremalfunktion})$$

或ハ
$$\zeta = \frac{4\xi}{(1+\xi)^2}$$

$$g'(0) = \frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=0}} = \frac{1}{4}$$

從ッテ單位円 $|z| < 1$ ヲ廣ゲテ行ク場合 = 實軸ノ 1 ヨリ大キ
ナ部分が常 = *Gebiet* ノ内部 = 入ラス様 = スレバ上ノ結果
ヨリ

$$1 \geq |f'(0)| \geq \frac{1}{4}$$

Extremalgebiet D ノ *Schlitz* I' が如何 = ナルカハ
Gebiet ノ拡張ノ仕方 = ヨルコトデアッテ一様 = ハ $5 = 1$ ト
 $5 = \infty$ トヲ結ブ曲線 = 沿ッタ *Schlitz* = ナル。今 *Schlitz*
が直線デアアル場合ノ *Extremalgebiet* ヲ D_0 , 函数ヲ $g_0(z)$
トスルト上ノ結果カラ $|g'(0)|$ ト $|g'_0(0)|$ トハ何レが大デア
アルカハ断定スルヲ得ナイ。シカシ *Koebe* ノ定理 = ヨレバ,
確カ =

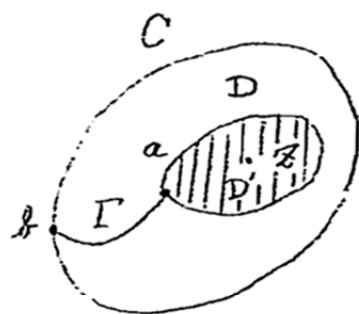
$$(2) \dots\dots |g'(0)| \geq |g'_0(0)| = \frac{1}{4}$$

トナラナケレバナラヌ。 D ト D_0 トヲ比較スルト、何レモ全
有限平面ヲオ、フ領域ヲ“外点”ヲ持タズ、唯 *Rand* ダケ
が異ナルモノデアアル。各々 *erweitern* シ盡シタ領域デア
ルカラ $|g'(0)|, |g'_0(0)|$ ノ大小ヲ比較スルノ = 上 = 使用シタ
Erweiterungsprinzip (即チ *Minimumprinzip*) デハ
不可能デアアル。 *Koebe* ノ定理ヲ証明スル = 當リ *Schmidt*
スハ *Ahlfors* ノ方法が *Erweiterungsprinzip* 以上
= 有效ナ、ハ (2) ノ不等式ヲ証明シ得ル点 = アルト思ハレ
ル。

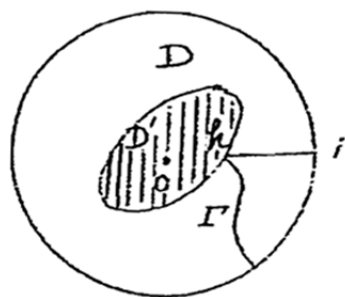
Rand ダケが異ナルニツノ領域 D, D_0 ヲ單位円 = 寫像
スルトキ、原点 = 於ケル *Abbildungsmodul* ノ間 = (2) ノ
關係が成立スルトイフコトカラ次ノマウナ事實ガ推測セラ

レル。

任意ノ單一連結ナ曲線 C ニヨリカコマレタ領域 D ノ内部ニ一点 a ヲ取り、又 C 上ニ一点 b ヲトル。更ニ D 内ニ a 以外ニ一点 c ニモヲトリ、 c ヲ内点トシ a ヲ *Randpunkt* =



持ツ様ナ D ノ *Zeilgebiet* D' ヲツクル。 a ト b トヲ D 内ニアル D' ノ内部ニ入ラナイ單一曲線 Γ デ結び、 $D =$ 對シテ Γ = 沿ヒ *Schlitz* ヲ入レタ領域ヲ G トスル。 G ヲ他ノ平面ノ單位円ニ寫像スル函数ノうちニ於ケル *abbildungsmodul* ノ最小ノ函数ハ何カ?



然シナガラコレデハ問題ガアマリ廣スギルノデ次ニ述ベルヤウニ問題ヲセマリシヲ見ル。領域ハ z 平面上ノ單位円

トシテ $z = re^{i\theta}$ (r 実数、 $0 < r < 1$) ナル一点ヲ固定スル。又 $c = 0$ ヲ内部ニツクミ $a = 1$ ヲ通過スル單一 *Jordan* 曲線デカコマレタ領域ヲ D' トスル。

h ト円周上ノ任意ノ点トヲ D' ノ内部ニ入ラナイ單一 *Jordan* 曲線ニヨツテ結び、 $D =$ コノ曲線 Γ = 沿フテ *Schlitz* ヲ入レタモノヲ G トスル。 G ヲ別ノ平面ノ單位円ニ寫像スル函数ヲ $f(z)$ 、 $D =$ 実軸ノ $h < z < 1$ ノ部分ニ *Schlitz* ヲ入レタ領域ヲ G_0 トシテ G_0 = 關スル寫像函数ヲ $g(z)$ トスル。(原点同志常ニ對應スル。) シカルトキ、次ノ不等式ガ成立シ

テ

$$(3) \dots\dots |f'(0)| \geq |g'(0)|$$

等号ハ D' が実軸ト一致スルトキニ限ル。(“ D' が単位円ニ對シテ直交スル円弧ナル場合ニ限ル”ト訂正)

(3)ノ事實が成立スルコトハ未ダ証明出来ナイノザアルが確かデアルヤウニ思ハレル。 $g(\zeta)$ ハ既ニ知ラレテキル様ニ *explicit* = 計算出来ル。

$$(4.1) \quad \begin{cases} t^2 = \frac{k-\zeta}{1-k\zeta} \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} z = -\frac{t-\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}t} \cdot \frac{1+\sqrt{k}t}{t+\sqrt{k}t} \end{cases}$$

求ムル寫像函数 $z = g(\zeta)$ ハ (4)ノ二ツノ変換ヲ組合セレバヨイ。原点ニ於ケル *Abbildungsmodul* ヲ求メルト

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{t=\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0}$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{t=\sqrt{k}} = \frac{-2\sqrt{k}}{1-k^2}, \quad \left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0} = \frac{1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\sqrt{k}}} = \frac{-2\sqrt{k}(1-k)}{1+k}$$

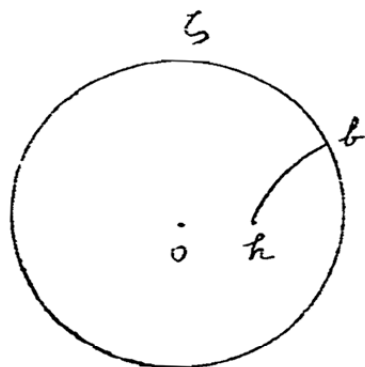
デアルカラ

$$(4.3) \quad \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0} = \frac{-2\sqrt{k}}{1-k^2} \cdot \frac{-2\sqrt{k}(1-k)}{1+k} = \frac{4k}{(1+k)^2} \quad \left(k < \frac{4k}{(1+k)^2} < 1\right)$$

$$\text{故ニ (3) ハ } |f'(0)| \geq \frac{(1+k)^2}{4k} \text{ トナル。}$$

註1) D' が円ナルトキ *Schwarz*ノ定理カラ $\frac{1}{k} \geq |f'(0)|$ ナルコトが出ル。

(3) = ツイテハ次ノ様ナ事實ガ成立スル。 $|\zeta| < 1 = \text{Schlitz}$ ヲ入レルトキ實軸ノ $(h, 1)$ ノ部分=入レル代リ=円周上=任意=一点 b ヲトリ、 h ト b トヲ通過シテ單位円=直交スル円

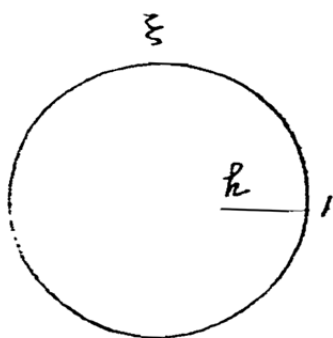


= 沿フテ Schlitz ヲ入レル。コノ領域ヲ G トシテ G ヲ z 平面上ノ單位円=寫像スル函数ヲ $\zeta = f(z)$ トスル。然ルトキハ、 b ノ位置=關セズ

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=0} = \frac{4h}{(1+h)^2}$$

デアアル。

証明: 計算スレバ出來ル。先ツ G ヲ z 平面上ノ單位円=實軸ノ $(h, 1)$ ノ部分= Schlitz ヲ入レル領域=寫像スル。ソノ変換函数ハ次ノ一次函数デアアル。



$$\frac{\zeta - h}{1 - h\zeta} = e^{i\theta} \frac{\zeta - h}{1 - h\zeta}$$

$\zeta = b$ ナルトキ $\zeta = 1$ デナケレバナラヌカラ $e^{i\theta} = \frac{b-h}{1-hb}$ ¹⁾ G ノ $\text{Schlitz}(h, b)$ ハ z 平面ノ $\text{Schlitz}(h, 1)$ = 移ルガ、

等角性=ヨリ、コレハ $|\zeta| = 1$ = 垂直デナケレバナラヌカラ $\text{Schlitz}(h, 1)$ ハ直線デアアル。コノ変換=ヨリ $\zeta = 0$ ハ

$$\zeta = \frac{h(1-e^{i\theta})}{h^2-e^{i\theta}} (=h) = \text{對應スル。次} = t^2 = \frac{h-\zeta}{1-h\zeta} = \text{ヨリ、}$$

註1) $b = -1$ デアルト $\zeta = 0$ ガ Schlitz ノ上=取ルカラ、

$b \neq -1$, 従ッテ $\theta \neq \pi$

ξ 平面ノ領域ハ t 平面ノ単位円ノ右半分ニウツサレル。

$$\xi = k \wedge t = \sqrt{\frac{k-k}{1-kk}} (=C) = \text{對應スル。平方根、ソ}$$

ノ實数部ガ正ナル方ヲ取ル。半円ハ $\varphi = -\frac{t-C}{1-\bar{C}t} \cdot \frac{1+\bar{C}t}{t+C}$
ニヨリ t 平面ノ単位円ニ寫像セラレ、 $t=C$ ト $\varphi=0$ トハ對
應スル。ソコヲ

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = \left(\frac{d\xi}{d\xi}\right)_{\xi=k} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=C} \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}$$

デアールカラ、右辺ノ各因数ヲ計算スルト

$$\left(\frac{d\xi}{d\xi}\right)_{\xi=k} = \frac{e^{i\theta}}{(1-kk)^2}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=C} = \frac{2C(1-kk)^2}{k^2-1}$$

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{-2C(1-|C|^2)}{1+|C|^2}$$

$$\text{又 } k-k = \frac{k(k^2-1)}{k^2-e^{i\theta}}, \quad 1-kk = \frac{(k^2-1)e^{i\theta}}{k^2-e^{i\theta}} \quad \text{カラ}$$

$$C = \sqrt{k}e^{-i\theta}, \quad |C| = \sqrt{k}$$

コレヲモトノ式ニ代入シテ

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

—— (計算終) ——

註2) $t^2 = e^{-i\theta} \frac{k-\bar{C}}{1-k\bar{C}}$ カラスガニ出ル。此ヨリ ξ = 概ル Trans-

formation ハ k ヲ中心トスル単位円ノ nicht euklidische
drehung デアル。

故 = (3) = 於テ Schlitz が $(k, 1)$ ナルトナニ限ツテ
 $\left(\frac{d\zeta}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}$ が最小ナルノデナクテハナクテ円周上ニモヲ勝手
 ニトルトキ k , モヲ通ル直交円ニ沿フテ Schlitz ヲ入レル
 トキ最小ナルリモ, k ヲムスバ任意ノ Jordan 曲線ニ沿フ
 テ Schlitz ヲ入レタトキハ原点ニ於ケル Abbildungs-
 modul が $(1+k)^2/4k$ ヨリ大ナルノデハナイカト思
 ハレル。

猶、次ノコトモ云ヘル。上カハ円ノ半径が 1 デアツタケ
 レドモ、コレヲ R ($R > k$) トシテ各平面ノ単位円ニ寫像ス
 ルコトヲ考ヘレバ交換函数ハ次ノ通りデアアル。

$$(5.1) \quad t^2 = \frac{R^2(k-\zeta)}{R^2-k\zeta}$$

$$(5.2) \quad \zeta = -\frac{t - \sqrt{k}}{R - \sqrt{k}t} \cdot \frac{R + \sqrt{k}t}{t + \sqrt{k}}$$

$$(5.3) \quad \left(\frac{d\zeta}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{4kR^2}{(R+k)^2}$$

(5) ハ右平面上ノ半径 R ナル円 = (k, R) ノ実軸ノ部分ニ
 Schlitz ヲ入レタ領域ヲ t 平面ノ半径 $\sqrt{k}$ ナル右半円ニ寫像
 スル。(5.1), (5.2) = 於テ ζ, t ヲ固定シテ $R \rightarrow \infty$ $k=1$
 ナラシムレバ、夫々

$$t^2 = 1 - \zeta$$

$$\zeta = -\frac{t-1}{t+1}$$

トナル。コレハ Koebe ノ *Extremalfunktion* デアル。又 (5.3) ハ $\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 4$ トナルカラ (3) が正シケレバ (2) フ生ジ、従ツテ (3) ハ Koebe ノ 定理ヲフクムコト = ナル。

猶、附言スルナラバ (3) が刻下ノ問題トナシ得ルカ否カニ問題デアル。(3) がウソデアレバ始メカラ話 = ナラナイが (3) が真トシテモソレが、現在知ラレテキル知識ヲ色々 = 組合ハセテ、引き出セナケレバナラナイ。誰 = モ出来ナイ様ナ困難ナ問題ヲ提出スルコトハ左程六ヶ敷クハナイが解ケナイ問題デハ仕方がナイ。現在比較的容易ニ証明出来ナケレバナラナイ。

又問題 = スル = シテモ、ソレが利益アル問題、即チ既 = 知ラレテキル知識ヲ更 = 啓発スルヤウナモノデナケレバナラナイ。上ニ (3) フ提出シテニ、三ノ考察ヲ試ミタケレドモ、ソレハ (3) がモットモナ問題デアルカ否カヲ調べタノデアツテ“此処 = 問題ガアル”ト云ツテ吹聴スル積リハ筆者 = 少シモ無いコトヲ特ニオコトワリスル。

又文献 = 暗イ筆者ノコトガアルカラ、トウ = 知レテキルコトヲ得々ト述べテキルヤウナ箇所モアルカモ知レナイ。讀者諸賢ノ御寛容ヲ切願シマス。