OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	柳原氏ニ紙上デオ答ヘ： 其他ニ・三分割問題ヲ中心ニシテ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 139, p. 131-138
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74542
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

617. 柳原氏ニ紙上デオ答ヘ.
其他二・三分割問題ヲ中心ニシテ

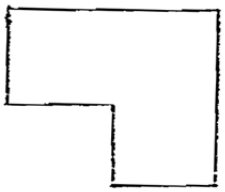
寺阪　英孝(阪大)

1、本紙第136号デ柳原氏ノ〝一ツノ平面圖形ヲ、コレト合同ナ圖形デ包圍スル問題〟ヲ拜読シマシタラ、ズット以前ノ本紙第17号デ當問題ニツキオ話ノアツタコトヲ知ツタノデ、ソレヲ拜見シマシタ所、ソノトキ早速御返事申上ガネバナラヌ様ナ事柄デシタ。

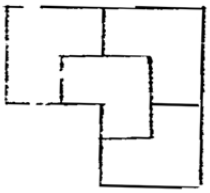
生憎當時ハマダ、コチラニ居リマセンデシタノデ氣が付カズ其ノマゝニナツテ居リマシタ次第デ、今トナツテハモウ

才答ノ必要がナイヨウデモアリマスが、コレニ関聯シテ諸賢ニ御教示ヲ仰ギタイコトモアリマスノデ、紙面ヲ借リルコトニシマシタ。

2. 柳原氏ノオ尋ネハ「〃合同ナル二ツノ平面單一閉曲線A, Bヲ以テ、コレト合同ナ図形Cヲ（隙間ナク）完全ニ包囲スルコトが出來ルカ〃ト云フヤウナコトが或ルトキ東大ノ學生ノ人ノ間デ問題トナッテ居タが、コレハ誰が云ヒ出シタノカ、又ソノ來歴如何」ト云フ意味ノコトデシタが、実ハ小生が斯ンナ妙ナコトヲ云ヒ始メタノデシタ。1932年頃ダッタト思ヒマスが、或ル時「〃(A)ナル圖形ヲ合同ナル四個ノ図形ニ分割セヨ〃ト云フ、ヨクアル考ヘ物ノ点ハ(B)デアルが、此ノ解ハ一意的デアルカ」ト云フ數學者ラシイ疑問が話題ニ上ッタコトがアリマシタ。此ノ種ノ問題ニ興味ヲ有ッテ居タノデ色々工夫ラシテヰル中、フト



(A)



(B)

K. Reinhardt: über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1928)

ヲ見付ケタノデス。

本論文ハ Hilbert ノ有名ナ平面ノ合同分割問題ヲ解ク手掛リトシテ，〃分割ニ要スル合同図形ハ、或ル假定ノ

下ニ，線分又ハ円弧カラナル多角形ダケ考ヘレバ宜シイ〃ト云フ主定理ヲ稍々複雑デスガ面白イ方法デ取扱ッテキルノデ、コレハ良イト早速十ガラ前ノ問題ニ Reinhardt ノ方法ヲ應用シヨウトシテ先ヅ手初メニ考ヘモシ証明モ試ミタノガ柳原氏ノ表現ヲ借用シマスト〃「A，Bガ重ナラナイデ或ル平面ノ一部Dヲ包囲スルトキ」DガA ト合同デアルコトハ不可能デアル，「但シDノ中ーA ト合同ナ図形ヲ容レルコトハ（隙間ガアッテモヨイナラ簡ヾニ）出來ル〃ト云フノデシタ。

當時數物ノ例會デモ話シタコトガアルノデスガ、其ノ後証明ガ満足ニ行カヌノデ打捨テテオキマシタ。ソレデスカラ Reinhardt ノ問題ガ程経テ Jahresberichte 紙上ニ出タトキハ，サモアリナント點頭イタト云ッテ、一体同誌ハ通常解答ハノ問題ヲ採用スル者デスカラ、流石ハ合同分割專門ノ Reinhardt ダケアッテ彼ノ難解ナ問題ガ而モ拡張サレタ形デ解ケルノダナト私カニ畏レ、敬ッタ訳デスガソレニシテモ誰カ外ニ解ク人ガアルダラウカト解答ノ出ルノヲ鶴首シテ待ッテキマシタトコロ、青天ノ霹靂、Vaderberg トイフ人ニヨッテ柳原氏ノ御紹介サレタマウーソノ誤ガ指摘サレタノデシタ。

然モソノ解答ノ明快サ、実ニ意外デスノ出來上ッタ所ヲ見レバ、彼ガ先ヅ証明ヲ試ミヨウトシテ図形ノ曲線ニ目ジルシヲ附ケツヽ次々ニ modify 遂ニ反対ノ結果ニ仕上ッタイキサツガ見エルヤウデスガ，其処迄ニ行ク辛抱強サニハタヾ

圧倒サレル外アリマセン。

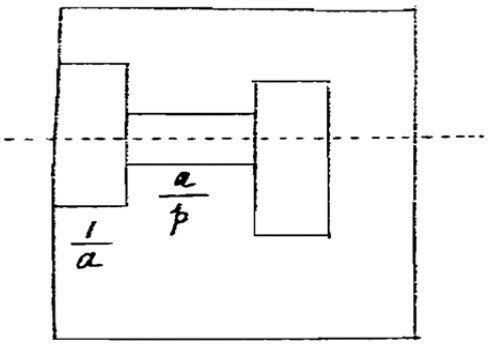
3. 柳原氏ヘノオ答トモツカスモノハコレデ終リマスが尚序ニ二三ノ蛇足ヲイタシマス。

所謂 dissection 分割ノ問題ハ通俗雑誌ノ考ヘ物欄ニ屢々見カケマスが、解ノ unicity ハ一般ニ触レラレズ又難カシイト思ヒマス。例ヘバ極ク簡單ナ図形ヲトツテモ、次ノ様ナノハ如何デセウ。

1°. 正三角形ハ n^2, $2n^2$ 又ハ $3n^2$ 個ノ合同図形ニハ夫々分割出来ルが、ソノ外ノ個数ニハ分割出来ナイ(?)

2°. 正方形ヲ奇数個ノ合同図形ニ分割スルニハ、矩形ニ分割スルヨリ外ナイ。ソノ中特ニ素数個ニ分割スル法ハ唯一ツヨリ外ナイ(?)

正方形ヲ素数個 $p(\neq 2)$ ノ〝矩形〟ニ分割スル法が唯一デアルコトハ初等的ニ判リマス。今正方形ノ辺長ヲ1トスレバ矩形ノ面積ハ $\frac{1}{p}$。由ツテソノ一辺ヲ $\frac{1}{a}$ トスレバ他ノ辺ハ $\frac{a}{p}$ トナル。今正方形が矩形デウメラレテ居ルトシ、コレヲ正方形ノ辺ニ平行ナ一直線デ截ツタトキ、$\frac{1}{a}$ ノ向キノガ m 個, $\frac{a}{p}$ ノ向キノガ n 個アッタトスレバ次式が成立スル。



(1) $\frac{m}{a}+\frac{na}{p}=1$ (1ハ正方形ノ辺長)

ココニ

(2)　$0 \leqq m \leqq a < p,\quad 0 \leqq n \leqq p$

ヨツテ

(3)　$na^2 - pa + mp = 0$

正方形ノ辺ニ平行ナ今一ツノ直線デ截ツタ時同様ニ m' 個，n' 個ナラバ，同ジク

$$n'a^2 - pa + m'p = 0$$

今 $n > n'$ ト假定シテ上ノ式ヲ (3) カラ引ケバ

(4)　$(n-n')a^2 + (m-m')p = 0$

(i)　a が無理数ナラバ (3) ニヨリ a^2 モ無理數。

此ノ時ハ (4) カラ $n = n'$ トナリ (1) ハ m, n ニツキ一通リシカ解ガナイコトトナルカラ，正方形ノ辺ニ平行ナ，ドノ直線上ニモ矩形ガ縦横ニ夫々同数ダケ並ンデヰルコトトナリ、コレガ事実不可能ナコトハ図形ノ上カラ容易ニ判ル。

(ii)　a が有理数デ $a = \frac{\lambda}{\mu}$　(λ, μ 整．正．既約)

ナラバ (4) ヨリ

(5)　$(n-n')\lambda^2 + (m-m')p\mu^2 = 0$

$n \leqq p,\ n' \leqq p$ ナル故 $(\lambda, p) = 1$ ノ時ハ $n = p,\ n' = 0$ デナケレバナラヌ。コレヲ (1) ニ入レレバ $a = 1$．由ツテ矩形ノ辺 $\left(\frac{1}{a}, \frac{a}{p}\right)$ ハ $\left(1, \frac{1}{p}\right)$ ナノデアル。又 $(\lambda, p) > 1$ ノ時ハ，即チ λ ガ p ヲ因数ニ有ツトキニハ (5) ヲ p デ割レバ

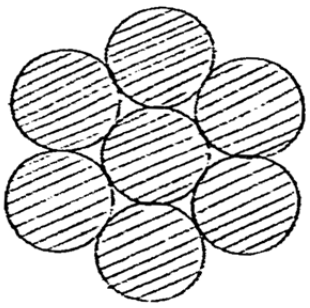
$$(n-n')\lambda'^2 p + (m-m')\mu^2 = 0 \qquad (\lambda = \lambda' p)$$

ノ形トナリ $(\mu, p) = 1$ ナル故、前ト同様ニ $m = p,\ m' = 0$

が出、(1) ニ入レルト $a=p$ ダカラ、由ッテ辺が $(\frac{1}{p}, 1)$ ナル矩形が得ラレル。イヅレニシテモ矩形ニ分割スル法ハ一通リシカナイ。以上

尚一般ノ場合、図形トカ分割トカ言葉が曖昧デスガ、多角形トカ面分トカニ制限シテ議論スレバハッキリシマス。

千尚元ノ問題ヲ考ヘテヰタ頃、次ノヤウナコトヲ考へ出シタコトガアリマス。ソレハ〝合同図形ヲ6個用ヰレバ、同形ノ図形ヲ常ニ包囲スルコトが出来ル〟ト云フノデス。



(コレニ関シテハ森本清吾氏が昭和七年頃ノ物理学校雑誌ニ書イテ居ラレマス)

サテ此ノ6ナル数デスガ近頃

Lichtenbaum: Sur un théorème de la topologie du plan. Matematičeski Sbornik T. 1 (43): 6. (1936)

ヲ見マシタラ次ノ定理が載ッテ居ルノデス。

〝平面Eヲ閉集合系 $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_i, \cdots\cdots$ デ被覆シタトキ、即チ $E=\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ ノトキ。平面上ノ任意ノ正方形ト素デナイ F_i ノ数が常ニ有限個ナラバ、コノ被覆ヲ正則デアルト云フ。モシ此ノトキ各 F_i ノ直径が更ニ有界ナラバ少クモ6個ノ F_i ト夫々素デナイヤウナ F_k が少クモ一ツ存在スル。〟

ト云フノデ実ハ斯ウイフ F_ν ハ無限ニ存在スルノデスガ、例ヘバ平面ヲ正六角形ニ分割スルト、ドノ六角形ニツイテモコレト共通点ヲ有ツモノハ6個デス。上ニ云ツタ包囲問題モ Lichtenbaum ノ定理モ，図形ノ周囲ニ関スルコトデ、6ト云フ数ハ偶然ノ一致デハナイ様デス。

所デ Lichtenbaum ノ定理ハ der zweite Pflastersatz トモ称スベキモノデセウガ、証明ニ9頁ヲ費シテヰル所ヲ見ルト少々長イヨウデスシ、而モ当然 n 次空間ニ拡張サルベキ性質ノモノデアルニ係ラズ、平面以外ニハ著者ハ触レテヰマセンカラ、色々ノ意味デ手ヲ附ケル余地ノアル問題ダト思ヒマス。

5. 安部道雄氏が先年ヤツテ居ラレタ〝矩形ヲ悉ク大イサノ異ナル正方形デ隙間ナク ウメル法〟—— 矩形デナクテ正方形ダト未ダ問題ハ解ケテヰナイノデ，其処ニ興味ガアル訳デスガ —— コレナドモ，Schoenflies-Dehn ノ Analytische geometrie ノ Anhang ニ出テヰル問題同様 topological ノ関係ガ入ル訳デシテシ，又 Lichtenbaum ノ定理ノヨウニ分割問題ニモ何物カヲ共ヘヨウトシテヰルノモアリマスガ、直接分割問題ノ位相幾何學化トモ解釈出来ルノハ

R. L. Wilder: The strong symmetrical cut sets of closed euclidean n-space Fund. Math. 27 (1936)

デ、良イ model ダト思ヒマス。

色々混雑シマシタガ、以上ノコトデ何カ御気付ノコトガアリマシタラ紙上デ御啓示願ヒタイト存ジマス。