



Title	Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation (IV)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 140, p. 143-148
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74545
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

620. Hilbert 空間 = 於ケル Linear translatable functional equation (IV)

北川 敏 男 (阪大)

[概要] (I) = 於テハ問題ノ起リヲ述べ、ソレニ對スル
一ツノ結果ヲ述べタ。(II) = 於テ、問題ニ對シテ特殊化ヲ施
シ、特殊化3ヲ得タ。(III) = 於テハ、(I) - (II)ノ議論トハ別
ニ、Banach空間値函数ノCauchy展開ヲノベタ。(IV)
即チIII部ニ於テハ、特殊化3ニ對シテ、コノCauchy級數
論ヲ適用スルコトニヨリ、特殊化3ニ於ケル解ガBochner
ノ意味デalmost periodicデアルコトヲ示サリ。コレ
ニヨツテ、吾々ノ結果ニ對スル証明ハ完了ナル。(但シ、吾
々ハ $G(\lambda) \equiv e^\lambda$ ノ場合ニツイテ述べタニ止マルノデア
ルガ。)

III. 定理ノ証明ノ完了

Ⅶ. II部ニ引續キ更ニ次ノ補助定理ヲ準備シヤウ。

補助定理 9.1. $K(x)$ ヲnumerical-valued
ト函数トシ、 $(0, \infty)$ デdifferentiableトシ、 $1 \leq x$
 $< \infty$ ニ對シテ $|x^2 K(x)| < H$ トナルヤウナ常數 H が存在ス
ルトスル。 $f(x) \in (F)$ デアリ、コレニ對シテ常數 G ガ
アツテ

$$\frac{1}{x} \int_0^x \|f(\xi)\| d\xi \leq G \quad (0 < x < \infty \text{ニ對シテ})$$

トナツテキルトスル。然ルトキニハ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) K(x) dx = f(+0) \int_0^{\infty} K(x) dx$$

証明: Numerically valued + $f(x)$ = 関スル Bochnerノ定理ノ証明ハ、上ノ如ク Banach空間値函数 $f(x)$ = 對シテモソノマ、アテハマル。(S. Bochner; Vorlesungen über Fouriersche Integrale (1932) §9 die Wiener'sche Formelヲ参照セラレヨ)

補助定理 9.2. $f(t) \in (F)$ ナリ、 $-\infty < t < \infty$ ニ於テ (F) ノ topology = τ bounded and uniformly continuous トスル。

$$K_n(\xi) = \frac{1}{C} \frac{(\sin p_n \xi)^4}{p_n^3 \xi^4} \quad \left(C = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^4 d\xi \right)$$

トスル。然ルトキニハ、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\xi) K_n(\xi) d\xi$$

ハ $n \rightarrow \infty$ ノトキ、一樣ニ $f(t)$ ニ Tend スル。

証明: 前補助定理並ビニ $[B_2]$ ヲ参照セラレヨ。

8. §5—7マデノ事柄ヲ、吾々ノ問題ニ利用スル。

補助定理 10. “特殊化3ノモトニ於テ

$$g_n(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\xi, x) K_n(\xi) d\xi$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

トオケバ、スベテノ (t, x) —— 但シ $\text{measure } 0$,
 t -set T' ノゾキ、又 $T' =$ 属セヌ $t =$ ツイテハ $\text{measure } 0$ ノ x -set ヲノゾク —— ニツイテ、

$$\Lambda \varphi_n(t, x) = 0$$

且ツ各 $n =$ ツイテ $\varphi_n(t, x)$ ハ一様ニ連続 $(-\infty < t < \infty)$ デアリ、 $\Phi_n: \{\varphi_n(t, x)\} -\infty < t < \infty$ ナル集合ハ $L_M^2 =$ 於テ L_M^2 , strong topology デ、 compact set ヲ形成スル。”

証明: 前半ハ、

$$\Lambda \varphi_n(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_{\xi} \{ \varphi(t+\xi, x) \} K_n(\xi) d\xi$$

トイフコトカラ示サレル。後半ハ 補助定理 5. 1—2 ヲ用フレバ明テカ。

補助定理 11. 特殊化 3 ノモトニ於テハ $\text{generating function } G(\lambda)$ ハ適當ニエランダ常数 $a, b =$ 對シテ
補助定理 8. 1 ノ假定ヲ満足スル。

証明: コレハ [T] Chapter I, §4, 定理 IV, I カラスグニ得ラレルコトデアル。同論文ヲ参照シテ戴キタイ。

補助定理 12. “補助定理 10 ト同ジ假定ノモトニ於テ、スベテノ (t, x) —— 但シ $\text{measure } 0$, t -set T'' ノゾキ、又 $T'' =$ 属セヌ $t =$ ツイテ、 $\text{measure } 0$ ノ x -set ヲノゾク ——

$$f_n(t, x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(x) e^{i\beta_{\nu}t} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

ナル関係がアル。”

証明: 補助定理 5.2 = 由ッテ $r \geq n$ ナラバ常ニ

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{C}_r}(t, 0; f_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_r(\sigma) S_{\mathcal{C}_r}(t+\sigma; 0; f_n) d\sigma \\ &= \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(x) e^{i\beta_{\nu}t} \end{aligned}$$

トナル。補助定理 11 及び補助定理 8.1 = ヨツテ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} S_{\mathcal{C}_r}(t, 0; f_n) = f_n(t, x)$$

ナル関係がスベテノ (t, x) —— 但シ, *measure 0*ノ t -set T'' ノゾキ, 又 T'' = 属ス又 $t = \text{ツイテ}$ ハ *measure 0*ノ x -set ノゾク —— = ツイテ 成立スル。ヨツテ、同様ノ意味ヲ

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(x) e^{i\beta_{\nu}t} = f_n(t, x)$$

9. 吾々ノ定理ノ証明ハ次ノ補助定理 = ヨツテ 完結スル。

補助定理 13. 特殊化 3ノモトニ於イテ、 $\varphi(t, x)$ ハ L^2_H ノ *strong topology* = *almost periodic* ナアル。

証明: 補助定理 10 = 於ケルガ如ク *approximating components* トモイフベキ $\{f_n(t, x)\}$ ヲ

ツクル。

$\{\varphi_n(t, x)\}$ / 各 $\varphi_n(t, x)$ ハ 補助定理 12 カラ
ミテレル如ク、 $L_M^2 = \tau$ *almost periodic* デアル、シカ
ルニ、補助定理 10 = ヨツテ $-\infty < t < \infty$ = テー様ニ
 $\varphi(t, x)$ = 収斂スルノデアルカラシテ、良ク知ラレタ定理
= ヨリ、 $\varphi(t, x)$ 又 L_M^2 / *strong topology* = テ
almost periodic デナケレバナラヌ。 (以上)

IV. 附 言

10. 以上ハ $Q(\lambda) \equiv e^\lambda$ ナル場合ニツイテ述べタノデア
ルガ、第 138 号 (II) / 始メニ述べタ場合ニツイテモ同様ニ
論ゼラレルコトハ (i) § 6 / ∞ = 於ケル λ -spectrum

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu}(x) (Q(\lambda))^{\nu} = 0 \text{ / 根ノ分布ガ, Langer, exponential sum / zero-points / 分布ニ関スル研究カラ知}$$

ラレルノデ、特殊化 / —3 = 相當シタ特殊化ヲ見出セルコト

(ii) (II) = 於ケル (F) = 於ケル *Linear translatable operation* / 議論ガツカヘル。(iii) 特ニ、定理 8.1 =
於ケル *convergence-theorem* / 條件ガミタサレテ
キル——以上ニツノ理由カラ見當ヘツク。

(i), (ii), (iii) / ウチ、(i) ラ細カク述べルコトハ長クナレ
ノデマメタツケデアル。(ii), (iii) / 事柄ニツイテハ、本文デ
ハベタ $Q(\lambda) \equiv e^\lambda$ / 場合ニシカ用キナイノデハマ、道具立
テガコトサララシイ感ジガスルノデ一般ノ場合ニ至ツテソノ

効果が見られルヤウと思ハレルが、コゝデ仔細ヲノベルコトハ避ケタイ。

11. Bochner-Neumannノ問題ハ、Muckenhouptノ論ジタ振動弦ノ問題ヲ波動方程式ノ問題ニ originヲモチ、ソレ故ニコソ彼等ハ operational-differential equationヲ論ジタワケデアロウ。シカシ、茲テハ数学トシテノ興味、(特ニ linear translatable operation トレテ)カラ以上ノヤウナ議論ヲ試ミタワケデアル。

(校正) 主ナルモノノミニ限リマスガ、(II)デ補助定理5ガニツアリマスガ、始メハ、5.1, 次ハ5.2デアリマス。(III)ニ於テ 評價定理ノ証明ノトコロニ t, x_0 ナドトアルノハスベテ t_0 デアリマス。