



Title	超越直徑ト Koebeノ定理（早田氏ノ問題ニ答ヘテ）
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 140, p. 155-168
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74547
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

622. 超越直径ト Koebeノ定理

(早田氏ノ問題=答ヘテ)

井 上 正 雄 (阪大)

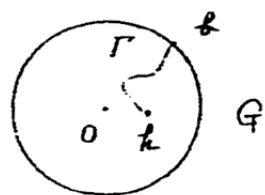
本誌第 138 号 613 = ツイテ早田氏 = ヨツテ考察サレ
タ問題 = 解答ヲ與ヘ、且ツソレニ関係シテ超越直径ト Koebe
ノ定理トノ関係 = ツイテニミノ考察ヲナシタイ。

談話 = ツイテ氏ハ次ノコトヲ豫想サレタ。

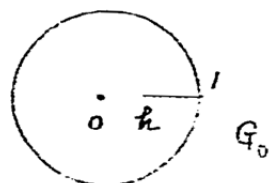
「 ζ 平面上ノ單位円ヲ D トシ、 $\zeta = h$ (h 実数、 $0 < h$
 < 1) ナルニ点ヲ固定スル。

h ト円周上ノ任意ノ点トヲ原點ヲ通ラナイ單一 Jordan
曲線 Γ = テ結び、 D = コノ曲線 = 沿ツテ Schlitz ヲ

入レタ領域ヲ G トスル。 G ヲ z 平面
上ノ單位円 $|z| < 1$ = 等角 = 寫像スル
函数ヲ $f(\zeta) = z$, D = 実軸



$h < \zeta < 1$ ノ部分 = Schlichte ヲ入レ
タ領域ヲ G_0 トシテ G_0 ヲ $|z| < 1$ =
等角 = 寫像スル函数ヲ $g(\zeta) = z$ トス
ル。但シ $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ 。



シカルトキ, 次ノ不等式が成立シ

$$|f'(0)| \geq |g'(0)| \text{ ----- (1)}$$

等号ハ Γ が單位円 = 對シテ直交スル円弧ナル場合 = 限
ル。」

シカシナガラ, コノ問題ハ實ハ Koebe ノ定理ノ特別ノ場合
ト考ヘルコトが出来ル。¹⁾

ソレ = ハ次ノヤツ = 考ヘレバヨイ。

$$|z| < 1 \text{ ヲ } \frac{(1+h)^2}{h} \cdot \frac{\zeta}{(1+\zeta)^2} = w \text{ ナル函数 = ヲツテ } w$$

平面 = 移セバ, ソノ Bildgebiet Δ ハ w 平面 = $\frac{(1+h)^2}{4h}$
 $\leq w \leq \infty$ ナル直線 = 沿ッテ Schlichte ヲ入レタ領域トナ
ル。

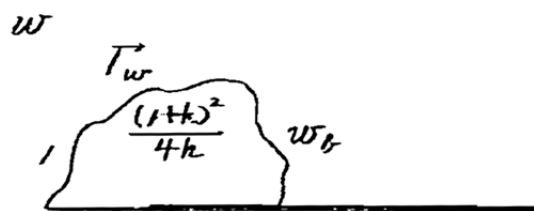
コノ変換 = ヲリ $\zeta = 0$ ハ $w = 0$,

$$\zeta = h \text{ ハ } w = 1, \quad \zeta = 1 \text{ ハ } w = \frac{(1+h)^2}{4h}$$

1) 早田氏ハコノ逆ヲ意圖サレタイタカモ知レナイガ。

$$\zeta = b \wedge w = \frac{(1+h)^2}{h} \cdot \frac{b}{(1+b)^2}$$

$$= w_b (> 0)$$



= 移サレ Γ ハ $w = 1$ ト

w_b トヲ結ブ曲線 Γ_w = 移ルモノトスル。

シカラバ

$$\left(\frac{dz}{dw} \right)_{w=0} = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} \left(\frac{d\zeta}{dw} \right)_{w=0}$$

シカレ =

$$\left(\frac{d\zeta}{dw} \right)_{w=0} = \frac{h}{(1+h)^2} \text{ ナル故}$$

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{(1+h)^2}{h} \cdot \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=0}$$

Koebeノ定理 = ヨレバ $\left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=0}$ が最小トナルトキハ $\triangle$ ハ

$1 \leq w \leq \infty$ = 沿ッテ *Schlicht*ノ入ッタ領域ノ場合デアリ
又コノトキ = 限ル。

故 = $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}$ が最小値トナルノハ Γ_w が $\left[1, \frac{(1+h)^2}{4h} \right]$ ヲ結

ブ線分 = ナルトキデアリコノトキ = 限ル, 即チ $b = 1$ トナリ
 Γ が実軸ト一致スル場合 = 限ル。

$$\text{シカモコノトキノ値ハ} \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=0} = \frac{1}{4} \text{デアルカラ} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{(1+h)^2}{4h}$$

デアル。

依ッテ不等式 $|f'(0)| \geq |g'(0)|$ ハ常ニ成立シ、等号ハ f が実軸ニ一致スルトキニ限ル。

コレニヨレバ早田氏ノ等号ノ成立スルトキノ豫想ノ間違ヒデアルコトが解ツタ。

シカラバ氏ノ計算ノ何処ニ缺点ガアツタカ?

ソノ誤謬ヲ角谷氏ハ次ノ如ク指摘サレタ。

「p. 113 = タイテ t 平面上ノ半径 1 ノ右半円ヲ

$t = C \longleftrightarrow z = 0$ ナル如ク單位円 $|z| < 1$ = 等角ニ寫像スル函数ハ

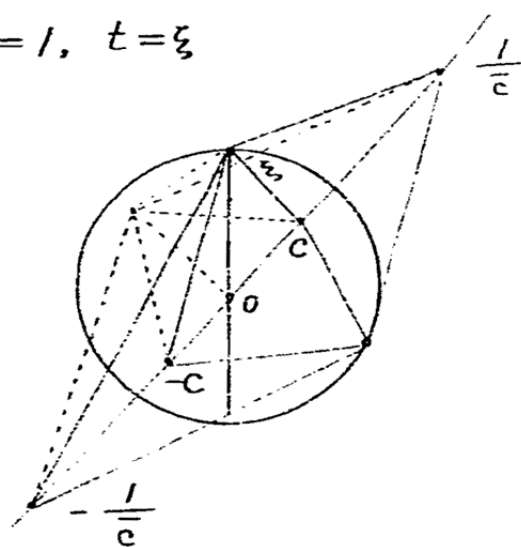
$$z = - \frac{t-C}{1-\bar{C}t} \cdot \frac{1+\bar{C}t}{t+C}$$

ハト書ケレタイルガ、コレハ間違ヒデアル。

$t = \xi$ ガ円弧上ニアルトキハ確ニ $|z| = 1$ トナルガ虚軸上ニクルトソウハユカナイノデアアル。何故ナラバ虚軸上ノスベテノ点デ $|z| = 1$ トナツタトスレバ

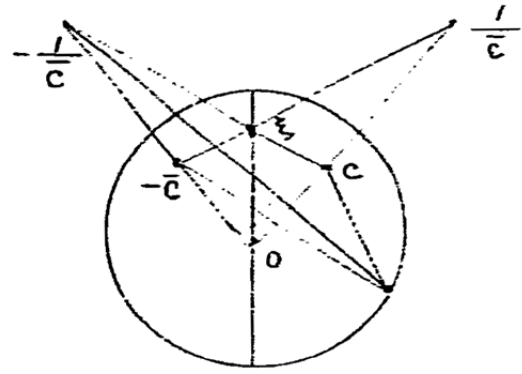
$$|z| = \left| \frac{t-C}{t+C} \right| \left| \frac{t+\frac{1}{\bar{C}}}{t-\frac{1}{\bar{C}}} \right| = 1, \quad t = \xi$$

シカルニ $C =$ 別断制限ガナイカラ之ヲ回轉シア考ヘテモヤハリ虚軸上デ上式ガ成立スルコトカラ円内ノアラエル点デ上式ガ成立スルコトナリ



矛盾デアル。(C = \bar{C} ナラバ
コレデモヨイ)

シカラバ如何 = スレバヨイ
カト云フニ, $t = \xi$ が半円
ノ同上 = アレバ常ニ



$$\left| \frac{t-c}{t+\bar{c}} \right| \left| \frac{t+\frac{1}{c}}{t-\frac{1}{\bar{c}}} \right| = 1$$

トナルカラ $\xi = \frac{t-c}{1-\bar{c}t} \cdot \frac{1+ct}{t+\bar{c}}$ ナル変換ヲトレバヨ
イコトガ解ル。

コレニヨツテ計算スレバ

$$\left(\frac{d\xi}{dz} \right)_{z=0} = \frac{(c+\bar{c})(1-|c|^2)}{1-|c|^2}$$

トナリ

$$\left(\frac{d\xi}{dz} \right)_{z=0} = -\frac{2c(c+\bar{c})}{(1+k)^2}$$

トナル, 但シ $C = \sqrt{k} e^{-i\theta}$

故ニ $\left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=0}$ ノ最大値ハ $C = \bar{C}$ ノトキデアリ, コノトキ
ニ限ル。

コノトキ $\left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=0} = \frac{4k}{(1+k)^2}$ トナル。 $C = \bar{C}$ ノトキハ

$k=1$ ノトキニ他ナラナイ。」

次ニカゝル *Abbildungsmodul* ノ問題ハ超越直径ト深

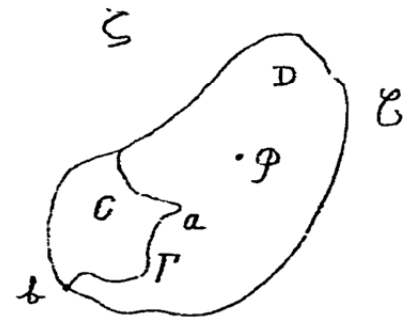
キ爾條ノアルコトハ勿論デアル。コノ超越直徑ヲ使ツテ一般ノ領域ノ場合ニ對スル前述ノ問題ヲ考ヘルコト一ツヨウ。

一般ノ場合トハ

「 ζ 平面上ノ任意ノ單一連結ナ曲線 C デ囲マレタ領域 D ノ内部ニ一点 a ヲ取り、又 C 上ニ点 b ヲトル。更ニ D 内ニ a 以外ノ一点 p ヲトリ a ト b トヲ D 内デ p ヲ通ラナイ單一曲線 Γ デ結ビ、 $D =$

對シテ $\Gamma =$ 沿ツテ *Schlitz* ヲ入レタ領域ヲ G トスル。

G ヲ他ノ平面ノ單位円内ニ p ヲ原点ニ移スガ如ク等角ニ寫像スル函数ノシテ $p = \zeta$ ケル



Abbildungsmodul ノ最小ナ函数 (或領域) ハ何か？」

ト云フ問題デアル。

コレヲ考ヘルタメ *Fekete* ノ定理ヲ次ノ如ク書き直ス。

定理 (*Fekete*)

ζ_0 、 ζ_1 兩平面上ニ ζ_0 、 ζ_1 。ヲ夫々内点トシテ 含ム單一連結領域²⁾ ヲ G_1 、 G_2 トシ、 ζ_0 ガ ζ_1 ニ對應スルヌクニ G_1 ヲ G_2 ニ等角ニ寫像スル函数ヲ $f(\zeta) = \zeta$ トスレバ

$$|f'(\zeta_0)| = \frac{d(C_{T_{\zeta_0}} G_1)}{d(C_{T_{\zeta_0}} G_2)}$$

2) 以下スベテ單位円ニ等角寫像出來ル如キモノミヲ著ヘル。

但シ $\zeta = CT_{\zeta_0} G_{\zeta}$, $CT_{\zeta_0} G_{\zeta} \cap G_{\zeta}$, G_{ζ} ノ 夫々
 $\frac{1}{\zeta - \zeta_0}$, $\frac{1}{\zeta - \zeta_0} = \tau$ 変換シテ 領域 $T_{\zeta_0} G_{\zeta}$, $T_{\zeta_0} G_{\zeta}$ ノ 余
 集合 (有界閉集合) ヲ 表ハシ, d ハ ζ ノ 超越直径ヲ 示
 ス。

コノ 定理 = ヨレバ G ヲ 単位円内 = 寫像スル 函数ヲ $f(\zeta) = z$
 ト スレバ

$$|f'(p)| = d(CT_p G)$$

トナルカラ 問題ハ $\frac{1}{\zeta - p}$ + τ 変換 = ヨツテ a ノ 移ル 点ヲ
 a_p ト スルトキ, $CT_p D$ ト a_p トヲ 如何ナル 曲線 = τ 結ビ
 ζ ノ 超越直径ガ 最小 = ナル カト云フ 問題 = 帰着スル (最
 初ノ 問題ハ $CT_p D$ カ円トナル 特殊ノ 場合デアアル)。

先ヅ $T_p D$ ヲ $\zeta = \infty \leftrightarrow w = \infty$

ナルカ如ク $|w| > 1$

= 等角 = 寫像スル 函数ヲ

$$\zeta = \tau w + \tau_0 + \frac{\tau_1}{w} + \dots,$$

$$\tau = d(CT_p D)$$

トシ a_p ノ Bild ヲ $a_{p,w}$,

T_p ノ Bildkurve ヲ

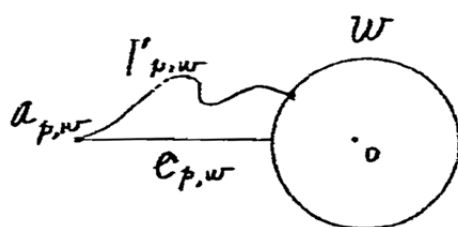
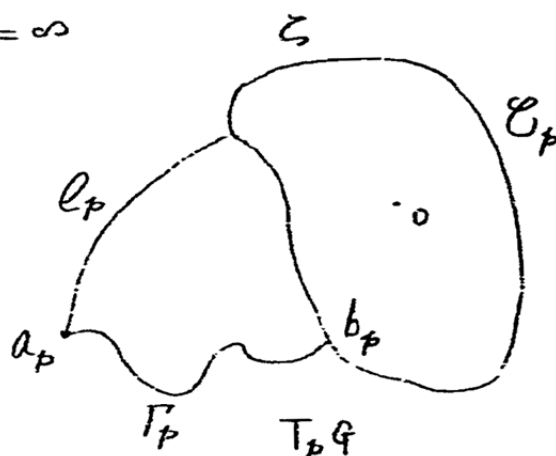
$T_{p,w}$ トシヤシ。

$|w| > 1 = T_{p,w} =$ 沿ツテ

Schlitz ヲ 入レテ 領域

$(T_p G)_w$ トシ, コレヲ $|z| > 1 = \infty \leftrightarrow \infty$ + τ ガ如ク

等角 = 寫像スル 函数ヲ



$$w = \lambda z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{z} + \dots, \quad \lambda = d(C(T_p G)_w)$$

トシ、コレヲ合成スレバ $T_p G$ 7 $|z| > 1$ = 等角 = 寫像スル函数

$$\zeta = \lambda \tau z + C_0 + \frac{C_1}{z} + \dots$$

カ得テレル。コノ

$$d(C(T_p G)) = \lambda \tau$$

デアル。

故 = $d(C(T_p G))$ が最小 = ナルノハ λ ノ最小 = ナルトキデアル。

處カ既 = 解決シタ前記ノ問題ハ要スル = 「円ト外部ノ一点トヲ與ヘコレヲ結ブ曲線ノウチ、ソノ集合ノ超越直径ノ最小トナルノハソノ点カラ最短距離 = アル点ヲ直線ヲ結ンダモノデアリ且ツコレ = 限ルト云フト同ジデアルカラ $\Gamma_{p,w}$ がコノ性質ヲ満足シテイル線分 $l_{p,w}$ ³⁾ = 一致スルトキ限り入が最小トナル。故 = $l_{p,w}$ ノ Urbild ヲ l_p トシ $T_p D = l_p$ = 沿ツテ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ $T_p G$ 。トスルトキ

$$l_p \neq \Gamma_p \text{ ナラバ } d(C(T_p G_0)) < d(C(T_p G))$$
⁴⁾

コレヲ問題ハ解決シタ。

3) ソノ点ト円ノ中心トヲ結ブ直線 = ヨッテ外側ヲ結ンダモノデアル。

4) コノトキモ最短距離ノ点ヲ線分ヲ結ンダモノガ求メルモノ = ナレヌウナ氣カスルガ實ハソウデナイコトガ解ツタデアル。超越直径ノ面白イ性質ト思フ。

元へ戻せば l_p は $\frac{1}{z} + p$ で変換した曲線 γ にとスルト
 キ $D = \gamma =$ 沿って *Schlicht* を入れた領域 G_0 が求まる領
 域であり、之れ = 関する写像函数の *Abbildungsmodul* が
 最小 = ナルノデアル。

次 = 再び特殊な場合 = 戻って、前ハ *Koebe* の定理 (ト
 $\gamma = \text{extremalgebiet} =$ 関する部分) を使って前述の問
 題を解決したノデアルが (1) ナル不等式がケナラバ別断 *Koebe*
 の定理をソノマゝ使ハズトモ *Fekete* の定理カラ次ノ如ク
 証明スルコトが出来ル。

問題 = 写ける写像函数 $f(z)$, $g(z) = \text{Fekete}$ の定理
 を適用スレバ不等式 (1) ハ

$$|f'(0)| = d(C_{T_0 G}) \geq d(C_{T_0 G_0}) = |g'(0)| \dots \dots (1)'$$

トナル。

シカル = 超越直径ハ又 *Robin* の常数 = ϵ 等しいカ
 ラ、 $T_0 G$, $T_0 G_0 =$ 関する ∞ を極トスル *Green* の函
 数ヲ夫々

$$G(z, \infty, T_0 G) = \log |z| + H_{T_0 G}(z)$$

$$G(z, \infty, T_0 G_0) = \log |z| + H_{T_0 G_0}(z)$$

トスルトキ

$$d(C_{T_0 G}) = e^{-H_{T_0 G}(\infty)}$$

$$d(C_{T_0 G_0}) = e^{-H_{T_0 G_0}(\infty)}$$

依って不等式 (1) ハ

$$H_{T_0 G}(\infty) \leq H_{T_0 G_0}(\infty)$$

トナル。

更ニコノ不等式ハ G 及 G_0 ノ境界上ニテ $\log|z|$ ナル値ヲトル G 及ビ G_0 内デノ調和函数ヲ大々 $H_G(z)$, $H_{G_0}(z)$ トスレトキ

$$H_G(0) \leq H_{G_0}(0) \text{ ----- (1)''}$$

トナル。

シカルニ, コノ不等式ハ常ニ成立スル。

何故ナラバ $E_{G,0} \supset E_{G_0,0}$ ⁵⁾ ナ

アルカラ良ク知ラレタ *majorante harmonique* = 関スル定理 ⁶⁾ =

ヨツテ

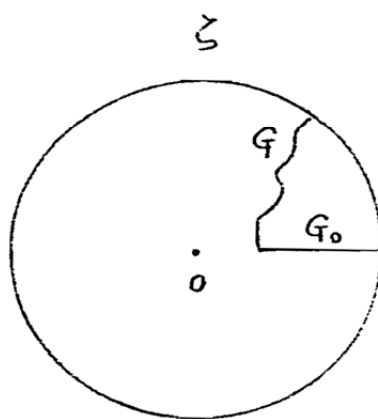
$$\text{一般ニ } H_G(z) \leq H_{G_0}(-|z|)$$

$$\text{トクニ } H_G(0) \leq H_{G_0}(0)$$

ヨツテ (1)'' 即チ (1) ナル不等式ハ常ニ成立スル。

尚又 *Fekete* ノ定理ヲ使ツテ談話 6/3 = フケル関係式 (2) ヲ証明スルコトモ出来ル。

即チ z 平面上ニ原点ヲ内点トシテ含ミ, $h(>0)$ ノ境界点トシテ含ム 単一連結領域 ⁴⁾ ヲ G , $\arg w = 0$, $|w| \geq h$ ナル直線ニ沿ツテ z 平面ニ *Schlicht* ヲ入レタ領域ヲ G_h トシ, G 及ビ G_h ヲ $|z| < 1$ = 原点カ互ニ對應スル如ク等角ニ寫像スル函数ヲ大々 $f(z)$, $g(z)$ トスレバ常ニ



5) $E_{G,0}$ ハ G ノ 0 ヲ原点トスル *projection* ヲ表ハス。本誌 136号, 603. p.52.

6) *Beurling: Etudes sur un prob. de maj.* p.45, p.52.

$$|f'(0)| \geq |g'(0)| \text{ ----- (2)}$$

何故ナラバ,

んヲ通り ∞ マデ延ビル曲線 Γ = チラ平面 = *Schlicht*
ヲ入レタ領域ヲ G^* トス。

Γ ヲ適當ニトレバ

$G^* \supset G$ ナラシメ得ル。

G^* = 閉・スル寫像

函数ヲ $g^*(z)$ トス

レバ G, G^* = 定理

ヲ使ヘバ

$$|f'(0)| \geq |g^{*'}(0)|$$

更ニ G, G_h = 定理ヲ應用スレバ

$$|g^{*'}(0)| = d(C T_0 G^*)$$

$$|g'(0)| = d(C T_0 G_0)$$

シカルニ有限ナルニ点 $[a, b]$ ヲ結ブ任意ノ曲線ヲ l , 直線
ヲ l_0 トスルトキ

$$d(l) \geq d(l_0) \text{ ----- (3)}$$

ナルコトが容易ニ解ルカラ

$$d(C T_0 G^*) \geq d(C T_0 G_0)$$

依ッテ

$$|f'(0)| \geq |g^{*'}(0)| \geq |g'(0)|$$

—— (証明了) ——

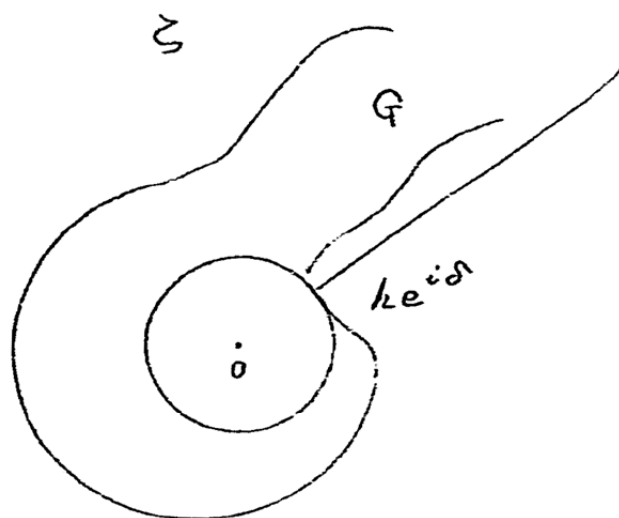
從ツテ, コノコトヲ使ヘバ 既ニ指示サレタ通り定理

“ $f(z) = z = z + a, z + \dots$ ヲ $|a| < 1$ デ單葉ナ正則

函数トシ、コノ *Bildgebiet* フ G トスルトキ、 G ハ原点
ヲ中心トスル半径 $\frac{1}{4}$ ノ内ヲ含ム”

ヲ次ノ如ク証明スルコト
ガ出来ル。

G ノ境界点ノウチ原
点カラ最モ近ク=アルモ
ノノ一ツヲ $ke^{i\delta}$ トス
ル。



ζ 平面 = $\arg \zeta = \delta$,
 $|\zeta| \geq k + 1$ 直線 = 沿

ツテ *Schlicht* フ入レタ領域ヲ G_k トシ、 G_k フ原点ガ原点
=移ル如ク $|z| < 1$ =等角=寫像スル函数ヲ $\zeta = g(z)$ トス
レバ、先=証明シタコト=ヨリ

$$|g'(0)| = \frac{1}{d(C_{T_0}, G_k)} \geq 1 = |f'(0)|$$

即チ $1 \geq d(C_{T_0}, G_k)$

シカル=

$$d(C_{T_0}, G_k) = d([0, \frac{1}{k}]) = \frac{1}{4k} \quad *)$$

故= $k \geq \frac{1}{4}$

即チ半径 $\frac{1}{4}$ ノ内ヲ含ム。且ツ $G_{\frac{1}{4}}$ フ $|z| < 1$ =等角=寫像
スル函数ハ

$$\zeta = \frac{z}{(1+ze^{-i\delta})} = z + \dots$$

*) 長さ $m + 1$ 線分ノ超越直径ハ $\frac{m}{4}$ ナアル。

トナルカラ、 $\frac{1}{4}$ ハ *extremal* ナ値デアル。

—— (証明了) ——

シカニ以上ノ証明デハ *Extremalgebiet* が $G_{\frac{1}{4}}$ (δ ハ任意)ニ限ルト云フコトハ証明サレテイナイ。コレが証明出来ルタメニハ (3)ニヲイテ

$$l \neq l_0 \text{ ナラバ } d(l) > d(l_0) \text{ ----- (4)}$$

が成立スレバ充分デアルが、コノ尙單ナル証明が思ヒツカナイ。

併シ一カニイテ (4)ノ成立スルコトハ必要デモアル。何故ナラバ逆ニ *Extremalgebiet* が $G_{\frac{1}{4}}$ ニ限ルト云フコトヲ逆用スレバ (4)ノ成立スルコトが解ルカラデアル。従ツテ (4)ヲ定理トシテ述ベルコトモ出来ルワケデアル。

以上ニヨツテ見レバ *Koebe*ノ定理ハ、要スルニ關係式 (4)即チ有限ノ二点ヲ結ブ *Kontinuum*ノうち超越直径ノ最小トナルノハ二点ヲ線分デ結ブトキデアリ且ツコノトキニ限ル —— ト同等デアル。

所が、前述ノ問題ハ円ト円外ノ一点トガアリ、ソレヲ円外デーツノ *Kontinuum*デ結ブトキ、ソノ超越直径ノ最小トナルノハソノ点ト最短距離ノ点トヲ結ブトキデアリ且ツコノトキニ限ル⁸⁾ —— ト同等トナル。

8) カ、ル超越直径ノ方カラ考ヘヲモ早田氏ノ計算ノ間違ツタイタコトガ直ニ解ル。

何故ナラバ円ニ直交スル充分大ナル円弧ヲトレバソノ超越直径ヲシテ如何様デモ大ナラシメ得ルカラデアル。(角谷)

コノ立場ヨリスレバ (4) ハ後ノ場合ニテイテ円ヲ点ニ收
斂サセタ極限トモ考ヘ得ベク、從ツテ、ムシロ後ノ場合ヲ一
般ト見ナシ得ルノデアリ、又コノコトハ p. 114 — p. 115 =
於テ述べラレテイル事項ノ意味ヲ説明スルモノデアロウ。