



Title	超越直徑ト Koebeノ定理（續）
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 141, p. 173-179
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74549
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

624. 超越直徑ト Koebe ノ定理 (續)

井 上 正 雄 (阪大)

談話 622 = 對スル簡單ナル補足デアル。

前号 = フイテハ Koebe ノ定理ト超越直徑 = 關スル
一ツノ *minimumproblem* トノ *Äquivalenz* ヲ
示シテオイタノデアルガ、今コレヲ少シク一般化シテ見ヤウ。
前談話 = フイテハ¹⁾

(I) 任意ノ二点

(II) 円ト円外ノ一点

(III) 單一連続閉曲線 (デ固マレタ開領域)²⁾ト外部ノ
一点

トヲ夫々一ツノ *Kontinuum* デ接続シ、ソノ超越直徑ヲ最
小ナラシメルニハ如何ナル *Kontinuum* デ接続スレバヨ
イカ? ト云フ問題ヲ考ヘタノデアルガ、コノ談話デハ一点
ヲ更ニ一般化シテ互ニ外部ニアル單一連続閉曲線ヲ一ツノ
Kontinuum デ接続シ、ソノ超越直徑ヲ最小ナラシメル
モノヲ求メヨウ。

ソノタメ最初

1) スベテ有限ノ位置 = アルモノトス。

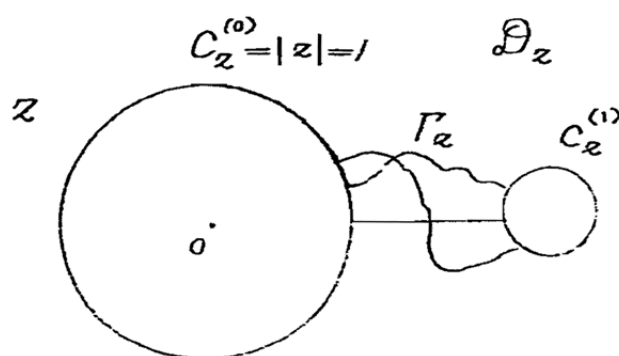
2) 單一連続閉曲線ノ超越直徑モ、之レニテ固レタ開領域ノ超越
直徑モ等シイコトが知レテイル。尚コノ曲線ニ對スル條件ニ以
下ニ當ニ一ツノ *Kontinuum* デ置キ換ヘラレル。

(IV) 互 = 外部 = アルニ円

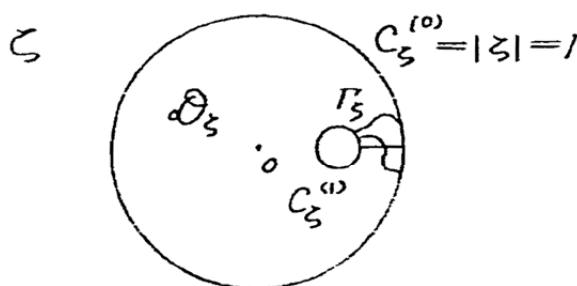
ヲ接続スル場合ヲ考ヘル。

之平面上ノ互 = 外部 = アルニ円周ヲ $C_z^{(0)}, C_z^{(1)}$ トシ、之
レ = テ 囲マレタ ∞ ノ内点トシテ 含ム 無限二次連結領域ヲ D_z
トスル。

尚接続 = ヨル超越直径ヲ 最小ナラシメルモノヲ 求メル問
題ハ 圖形ノ 移動 ヌ 相似縮小 = ヨツテ 不変デアルカラ、 $C_z^{(0)}$ が
之平面ノ 單位円周デアリ、 $C_z^{(1)}$ ノ 中心が 実軸上 = アルモノト
假定シテモ 何等一般性
ヲ 失ハナイカラ、此ノ
假定ノ モト = 話ヲ 進メ
ル。



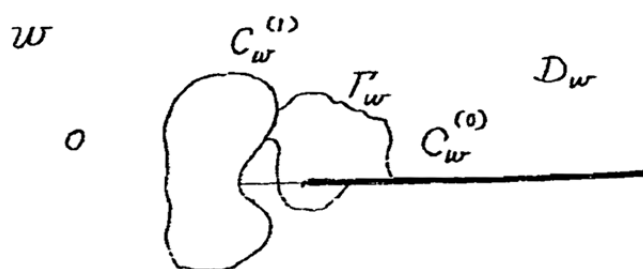
先ヅ $\zeta = \frac{1}{z}$ ナル
Inversion デ D_z ヲ
之平面上ノ 單位円内ノ
領域 D_ζ = 変換スル。
 $C_z^{(1)}$ ノ Bildkreis
ヲ $C_\zeta^{(1)}$ トスル。



コノ D_ζ ヲ 更ラ =
Koebe, Extremal-
funktion

$$w = \frac{\zeta}{(1+\zeta)^2}$$

= ヨツテ w 平面上ノ



領域 $D_w =$ 変換スル。

コレ=ヨリ $|z|=1$ ($C_z^{(0)}$ / Bildkreis) ハ
 $|w| \geq \frac{1}{4}$, $\arg w = 0$ ナル実軸上ノ半直線=移サレ, $C_z^{(1)}$
 / Bildkurve $C_w^{(1)}$ ハ実軸=對シテ對稱ナ且ツ之レ=直
 交スル單一閉解析曲線トナル。

依ツテ更ニ之ノ曲線が円周トナル如ク D_w ヲ t 平面上ノ
 次ノ如キ領域 $D_t =$ 原点同志相對應スル如ク変換スルコト
 が出來ル。

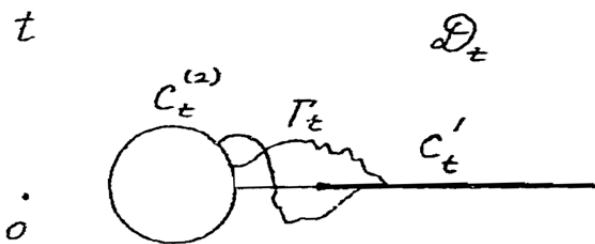
$C_w^{(0)} (|w| \geq \frac{1}{4}, \arg w = 0)$ / Bild が $C_t^{(0)} (|t| \geq \delta, \arg t = 0)$ トナル。但シ δ ハ寫像函数ニ關係ス
 ル正ノ常数, 且ツ $C_w^{(2)}$ / Bild ハ中心が実軸上ニアル円
 周 $C_t^{(2)}$ トナル。

サテ $C_z^{(0)}$, $C_z^{(1)}$ フー
 ツノ單一連続閉曲線³⁾ Γ_z
 テ接続シ, コレノ各寫像
 函数=ヨル Bild Γ_z ,

Γ_w , Γ_t トスル。

$\Gamma_t =$ ヨツテ $D_t = \text{Schlitz}$ フ入レテ出來ル單一連結
 領域ヲ Θ_t トスル。

Θ_t フ z 平面上ノ單位円内ニ= 原点同志對應スル如ク等
 角ニ寫像スル。



3) カール曲線=ノミツイテ考ヘレバヨイコトハ超越直径ノ單
 調性ヨリシテ明カデアイル。

シカルトキ前談話 = フケル *Fekete* の定理 = ヨリ

$$\left| \frac{dx}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = d(C T_0 \mathcal{D}_\zeta) = d(C \mathcal{D}_\zeta),$$

コト = $\mathcal{D}_\zeta \wedge \mathcal{D}_t$ の Urbild デアリ $\mathcal{D}_\zeta \wedge D_\zeta = \Gamma_\zeta =$ 沿
ツツ *Schlitz* フ入レタ領域デアル。

且ツ $\left| \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = d(C T_0 \mathcal{D}_t)$

トナル。

シカル =

$$\left(\frac{dx}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} \left(\frac{dt}{dw} \right)_{w=0} \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)_{\zeta=0}$$

デアリ $\left| \frac{dt}{dw} \right|_{w=0}, \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} (\neq 0) \wedge \Gamma_\zeta (\Gamma_\zeta, \Gamma_w, \Gamma_t) =$

ハ無関係ナ因数デアルカラ

$$\left| \frac{dx}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} (=d(C \mathcal{D}_\zeta))$$

ヲ最小ナラシメル = ハ

$$\left| \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} (=d(C T_0 \mathcal{D}_t))$$

ヲ最小ナラシムレバヨイ。

シカル = $C T_0 \mathcal{D}_t$ ハ円ト外部ノ一点トヲ接続シタモノ
= 他ナラナイカラ, コレハ (II) = ヨツテ既ニ解決シテオイタ
ヨク円ノ中心ト外部ノ点トヲ結ブ線分 = 沿ツテ接続シタモノ
が最小トナリ且之レ = 限ツタノデアル。

ヨツテ之レノ *Urbild* トシテ得ラレル l_z (之平面上)
 $1) =$ テニ円周 $C_z^{(0)}$, $C_z^{(1)}$ ヲ接続シタモノガ求メルモノデア
 アル。コレハ取りモ直サズ $C_z^{(0)}$ ト $C_z^{(1)}$ トノ中心ヲ結ブ線
 分 $\equiv$ 沿ッテニ円周ヲ接続スル場合デアアル。

ヨツテ問題ヲ次ノ如ク解クコトが出来タ。

「互ニ外部ニアルニ円周ヲーツノ *Kontinuum* デ接
 続シテ、ソノ超越直径ヲ最小ナラシメルモノハ、両円ノ中心
 ヲ結ブ線分 $\equiv$ 沿ッテ両円ヲ接続シタトキデアリ、且ツコノ
 トキニ限ル」

サテ、次ニ z 平面上ノ

(V) 互ニ外部ニアル單一連続閉曲線 $C_y^{(0)}$, $C_y^{(1)}$

ヲーツノ *Kontinuum* デ接続スル場合ハ次ノヤウニ考
 ヘレバヨイ。

$C_y^{(0)}$, $C_y^{(1)}$ ヲ境界ニモツ ∞ ヲ内点トシテ含ムニ次連
 結領域ヲ D_y トシ、 D_y ヲ z 平面上ノ無限ニ次連結領域 D_z
 $\equiv \infty$ 同志ガ對應スル如クニ等角ニ寫像スル、

コト $\equiv D_z$ ハ前述セシモノト同一ノ性質ヲ有スルモノ
 トスル。

カ、ル寫像函数ハ先ヅ D_y ヲーツノ円環内ニ寫像シテ後
 ∞ ノ *Bildpunkt*ガ再ビ ∞ ニ移ル如ク z 平面上ニ
Inversion ヲ施シ、シカル後増減ヲ加減乗除スルコ
 トニヨツテ得ラレル。

$C_y^{(0)}$ ト $C_y^{(1)}$ ヲーツノ單一連続曲線³⁾ Γ_y ニテ接続シ、
 Γ_y ノ *Bildkurve*ヲ Γ_z トスル。 $D_y = \Gamma_y$ ニ沿ッテ

Schlicht, 入ッテ単一連結領域ヲ $\mathcal{D}_y$ トスル。

同様 $D_z = \Gamma_z =$ 沿ッテ Schlicht, 入ッテ領域ヲ $\mathcal{D}_z$ トシ、之ヲ前同様 $|x| < 1 =$ 等角 = 寫像スル。

カクテ $\mathcal{D}_y$ ヲ $|x| < 1 =$
等角 = 寫像スル函数が得ラレ
ル。

$y \longleftrightarrow z$ ナル変換、 $z = \infty$
ノ近傍 = フケル展開ヲ

$$y = \lambda z + \lambda_0 + \frac{\lambda}{z} + \dots$$

トシ、 $z \longleftrightarrow x$ ナル変換ヲ

$$z = \frac{\tau}{x} + \tau_0 + \tau_1 x + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\text{但シ } \tau = d(C\mathcal{D}_z)$$

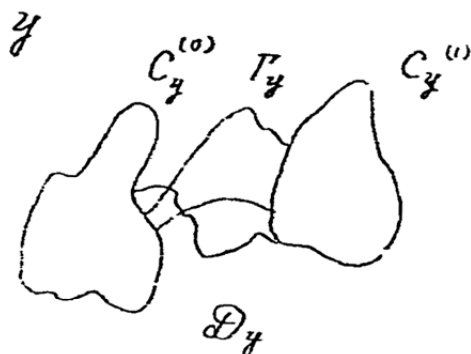
トス。

シカラバ $y \longleftrightarrow x$ ナル変換ハ

$$y = \frac{\lambda\tau}{x} + C_0 + C_1 x + \dots, \quad \text{但シ } \lambda\tau = d(C\mathcal{D}_y)$$

トナル。

シカル = λ ハ $\Gamma_y =$ 無関係ナ因数ナル故 $d(C\mathcal{D}_y)$ ヲ
最小ナラシメル = ハ $\tau = d(C\mathcal{D}_z)$ ヲ最小ナラシメレバヨ
イ。コレハ既ニ解決シタ如ク二円 $C_z^{(0)}, C_z^{(1)}$ ノ中心ヲ結ブ線
分 = ヨッテ両円同ヲ接続シタ場合デアリ、且ツコノトキ = 限
ルノデアルカラ、之レノ Urbild トナル連続曲線 = テ $C_y^{(0)}$,



$C^{(1)}$ が接続シタトキニ、ソノ起趣直径が最小ニナリ且ツコ
ノトキニ限ルノデアアル。

コレデ一般ノ場合ノ求メ方が解ツタ。

以上ノコトヲ *Abbildungsmodul* ノ問題ニ
直セバ

「單一連続閉曲線 $C^{(0)}$ デ囲マレ
タ領域内ニ更ニ單一連続閉曲線 $C^{(1)}$
ヲ画キ、 $C^{(0)}$ 、 $C^{(1)}$ ニテ囲マレルニ
次連結領域ヲ D トスル。 D 内ニ
一点 p ヲ固定スル。



シカルトナ $C^{(0)}$ 、 $C^{(1)}$ ヲツノ
カヲ通ラナイ連続曲線ニテ接続シ、
之レニ沿ツテ D = *Schlitz* ヲ入レタ領域 (單一連結) ノ
ヲ原点同志對應スル如ク他平面ノ単位円内ニ等角寫像ス
ルモノノウチ、 μ = フケル *Abbildungsmodul* が
最小トナルニハ、如何ナル曲線ニテ $C^{(0)}$ 、 $C^{(1)}$ ヲ接続スレバ
ヨイカ？」

ト云フ問題ヲ考ヘタコトニナル譯デアアル。