



Title	SchlitzニヨルVerzerrung ニ就イテ
Author(s)	早田, 文一
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 141, p. 180-185
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74550
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

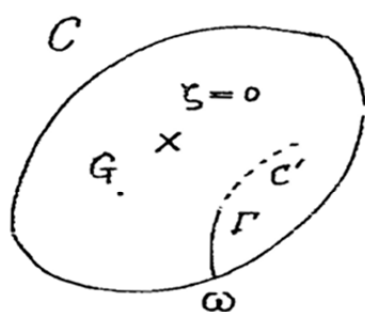
<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

625. Schlitz = ヨル Verzerrung = 就イテ

早 田 文 一

$\zeta=0$ ヲフクム單一ナ Jordan 曲線ニヨリカコマレル *schlicht* ナ領域ヲ G トスル。



G ヲ z 平面ノ單位円ニ寫像スル函数ヲ

$\zeta = f(z)$ トスル。但シ $f(0) = 0$

又 C 上ノ一點 ω ヨリ $G = \text{Schlitz } \Gamma$ ヲ入レル。 Γ ハ $\zeta=0$ ヲ通過シナイ

モノトスル。コノ領域ヲ G_Γ , 寫像函

數ヲ $\zeta = f_\Gamma(z)$ トスル。 ($f_\Gamma(0) = 0$) シカルトキハ次ノ事實が成立スル。

$$|f'(\omega)| > |f'_\Gamma(0)|$$

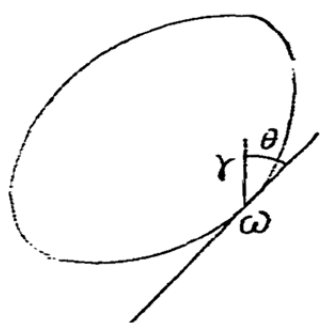
コレハ *Minimumprinzip* ヨリ容易ニ証明セラレル。
(第138号, 613)

今 ω ヨリ G ノ内部ニ Jordan curve C' ヲ $\zeta=0$ ヲ通過シナイヨウニ引ク。 ω ヨリ C' 上ニ測ツタ長サ S ナル Schlitz Γ ヲ入レル。コノ領域ヲ G_S トシ寫像函数ヲ $\zeta = f_S(z)$ トスレバ ($f_S(0) = 0$) 上ノ結果ヨリ $|f'_S(0)|$ ハ S ノ *monoton abnehmende Funktion* ナアルコトがワカル。

次ニ ω ヨリ長サ無限小ノ Schlitz γ ヲ入レルトキ内部ノ *Abbildungsmodul* カ γ ノ方向ニヨリ如何ニ変化スルカヲ考察スル。

ω を *analytische Jordanbogen* C 上 *regulär* な点とし, $\omega =$ 於ける切線と γ とのなす角 θ とスル。

$|f'_\gamma(0)|$ が γ の長さ λ が一定より大なり θ の如何なる値に對して最小となるか問題スル。 γ の長さを λ とし, λ は G の「*Dimension*」= 比較して極小なサイト假定スル。



G を ξ 平面の単位円 = 寫像スル函数 $\zeta = g(\xi)$, ($g(0) = 0$) とスレバ G_γ は $\zeta = g(\xi) = \gamma$ より ξ 平面の単位円 = *Schlitz* γ_0 が入ッテ領域 = 寫像セラレル。 γ_0 は単位円周上ノ一点 = 於イテ

Tangent と θ なる角 θ をなす無限小の *Strecke* デアル。

この領域を z 平面の単位円 = 寫像スル函数 $\xi = h_{\gamma_0}(z)$,

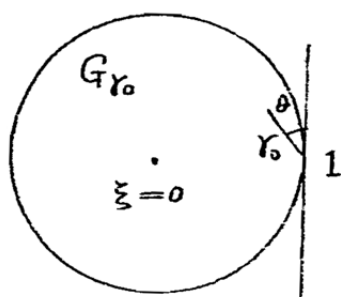
($h_{\gamma_0}(0) = 0$) とスル。シカるとキハ $f_\gamma(z) = g(h_{\gamma_0}(z))$

デアルカラ

$$\left| \frac{df_\gamma(z)}{dz} \right|_{z=0} = \left| \frac{dg(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \left| \frac{dh_{\gamma_0}(z)}{dz} \right|_{z=0} = |g'(0)| |h'_{\gamma_0}(0)|$$

$|g'(0)|$ は *Schlitz* γ = 無関係な因数デアルカラ、以下 = 於てハ專ラ $|h'_{\gamma_0}(0)|$ を考察スル。

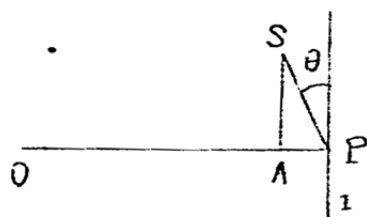
ξ 平面の単位円 = $\xi = 1$ より長さ λ なる線分ノ *Schlitz* γ_0 を入レル。 λ は 1 (単位円の半径) = 比較して極小なサイ數とスル。且ツ γ_0 は $\xi = 1$ = 於ける切線と角 θ をなす。この領域を z 平面の単位円 = 寫像スル函数 $z = g_{\gamma_0}(\xi)$



($\mathcal{P}_{\gamma_0}(0)=0$) トスル。コレハ
 $\xi = h_{\gamma_0}(z)$ ノ逆函数デアアル。

$$\Psi(\xi) = \log \left| \frac{\mathcal{P}_{\gamma_0}(\xi)}{\xi} \right|$$

ト置ケバ $\Psi(0) = \log |\mathcal{P}'_{\gamma_0}(0)|$ デ
 アル。



$\Psi(\xi)$ ハ G_{γ_0} ノ Rand $|\xi|=1$
 = 於イテ 0 デアル。又 Rand γ_0
 ノ上デハ

$$(1) \quad \Psi(\xi) = -\log |\xi|$$

トコロガ γ_0 ノ長サハ單位円ノ「チメーション」ニ比較シテ
 小サイノデアアルカラ。上デ $\xi=1$ ヨリノ距離 S ナル点ニ於
 ケル $\Psi(\xi)$ ノ値ハ S ヨリ Radius $(0, 1)$ ニ下シタ垂線ノ
 足 A ニ於ケル $-\log |\xi|$ ノ値ニ等シイ。

$$AP = S \sin \theta \text{ デアルカラ}$$

$$(2) \quad \Psi(\xi) = -\log OA = -\log(1 - S \sin \theta) \quad (S < 1) \\ = S \sin \theta$$

故ニ $\Psi(\xi)$ ハ $|\xi|=1$ ニ於テ 0 トナリ γ_0 ノ上デハ 1 ヨリ
 ノ距離ガ S ナル点ニ於テ $S \sin \theta$ ナル値ヲトル。シカシテ
 G_{γ_0} 内部ニ於テ、至ルところ正則ナル調和函数デアアル。今
 $\Psi(\xi)$ ノ θ ニ對スル *abhängigkeit* ヲ考ヘルノデア
 アルカラ $\Psi_\theta(\xi)$ ト書クコトニスレバ

公式ニヨル (*Kewlinna; Eindeutige analytische Funktionen* 27 頁参照)

$$\Psi_{\theta}(\xi) = 2 \int_{S=0}^{\lambda} S \sin \theta \cdot d\omega(\xi; S, \theta)$$

Schlitz γ_0 は二ツノ側 (Upper) を有スルカラ因数2ヲ要スル。 $\omega(\xi; S, \theta)$ は1ヨリノ長サ S ナル γ_0 ノ一部
 分ノ G_{γ_0} = 関スル *harmonisches Mass* ナアル。 (G_{γ_0} ,
 $|\xi|=1$ ナル Randハソノ上ノ Randwert が0ナアルカ
 ラ上ノ Darstellung = *explizit* = 入ツテコナイ。) 故 =

$$\Psi_{\theta}(0) = 2 \int_{S=0}^{\lambda} S \sin \theta \cdot d\omega(0; S, \theta)$$

コノ = 於テ次ノ差ヲ作ツテ見ル。

$$(3) \quad \Psi_{\frac{\pi}{2}}(0) - \Psi_{\theta}(0) = 2 \int_{S=0}^{\lambda} S (1 - \sin \theta) d\omega(0; S, \theta) \\ + 2 \int_{S=0}^{\lambda} S d\left\{ \omega(0; S, \frac{\pi}{2}) - \omega(0; S, \theta) \right\}$$

(3)ノ右辺ノ第一項ハ負ニナラナイコト明カラアル。ヨツテ左
 辺ノ負トナラナイコトヲ云フタメニハ次ノ不等式

$$(4) \quad \omega(0; S, \frac{\pi}{2}) - \omega(0; S, \theta) \geq 0$$

が証明出来レバヨイ。コレハ *anschaulich klar* ト思フ
 がケデ厳密ニ証明ハ出来ナイ。今コレニ関シテ二ツノ極端ナ
 場合ヲ考ヘテ見ル。

I) γ_0 が単位円周ノ一部ニ重ナル場合。 ($\theta=0$, 又ハ
 π)

II) γ_0 が単位円周ニ垂直ナル場合 ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

I)ノ場合 = $\omega(0; S, \theta) = \frac{S}{2\pi}$. II)ノ場合 = $\omega(0; S, \theta) = \frac{S}{2\pi}$ (nevanlinna; 上掲. 103 頁参照)

$$(5) \quad \omega(0; S, \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1 - \frac{S}{2}}{1 + \frac{S}{2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{S}{2-S} \\ = \frac{S}{\pi}$$

故 = 明ラカ =

$$\omega(0; S, \frac{\pi}{2}) > \omega(0; S, 0)$$

θ が 0 より $\frac{\pi}{2}$ まで増加スルトキ $\omega(0; S, \theta)$ 亦 $\omega(0; S, \theta)$ 増加スルト思ハレルガ、コレが厳密 = 云ヘレバ (4) が証明出来タコト = ナル。 G_{r_0} 内ノ任意ノ一点 ξ = 於ケル値 $\omega(\xi; S, \theta)$ ハ θ ノ連続函数デアルコトハ明瞭デアルガ、ソノ極大値 = 関シテハ何モワカラナイ。更ニ考究フ続ケテ他日本誌上ニ正確ナ解答ヲ述ベタイト希ツテキル。

猶 (5) = ヨツテ

$$\Psi_{\frac{\pi}{2}}(0) = 2 \int_0^\lambda S d\omega(0; S, \frac{\pi}{2}) = \frac{\lambda^2}{\pi}$$

$$\text{今 } g_{r_0}(\xi) = c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots$$

ト置ケバ

$$\Psi_{\frac{\pi}{2}}(0) = \log \left| \frac{g_{r_0}(\xi)}{\xi} \right|_{\xi=0} = \log |c_1|,$$

故 =

$$|c_1| = e^{\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

(4) が証明出来タナラバ、云ハレル事柄ハ次ノ通りデアイル。

単位円周上の一定点より長さを加へる Schlicht γ_0 を入る
 領域 γ の平面、単位円に写像する函数 $z = \varphi_{\gamma_0}(\zeta)$ と
 すれば

$$\left| \varphi'_{\gamma_0}(0) \right| \leq e^{\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

但し入る I は比較して極めて小さいと假定する。

$$\left| \varphi'_{\gamma_0}(0) \right| \left| h'_{\gamma_0}(0) \right| = 1 \text{ デアルカラ}$$

$$\left| h'_{\gamma_0}(0) \right| \geq e^{-\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

故に最初問題にシテ $\left| f'_\gamma(0) \right|$ の最小値は $e^{-\frac{\bar{\lambda}^2}{\pi}} \left| g'(0) \right|$ とナル。

$$(\lambda = \bar{\lambda} \left| g'(\omega) \right|, \quad g'(\omega) \neq 0)$$