OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	SchlitzニヨルVerzerrung ニ就イテ
Author(s)	早田, 文一
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 141, p. 180-185
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74550
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

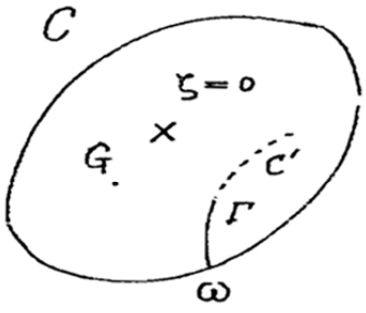
https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

625. Schlitz ニヨル Verzerrung ニ就イテ

早田 文一

$\zeta=0$ ヲ7クム単一ナ Jordan 曲線ニヨリカコマレル schlicht ナ領域ヲ G トスル。



G ヲ z 平面ノ単位円ニ寫像スル函数ヲ $\zeta=f(z)$ トスル。但シ $f(0)=0$

又 C 上ノ一点 ω ヨリ G ニ Schlitz Γ ヲ入レル。Γ ハ $\zeta=0$ ヲ通過シナイモノトスル。コノ領域ヲ G_Γ、寫像函数ヲ $\zeta=f_\Gamma(z)$ トスル。($f_\Gamma(0)=0$) シカルトキハ次ノ事実ガ成立スル。

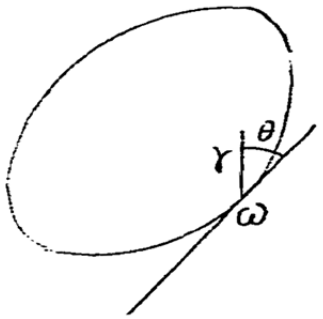
$$|f'(0)|>|f'_\Gamma(0)|$$

コレハ Minimumprinzip ヨリ容易ニ証明セラレル。(第138号, 613)

今 ω ヨリ G ノ内部ニ Jordankurve C' ヲ $\zeta=0$ ヲ通過シナイヨウニ引ク。ω ヨリ C' 上ニ測ツタ長サ S ナル Schlitz Γ ヲ入レ。コノ領域ヲ G_S トシ寫像函数ヲ $\zeta=f_S(z)$ トスレバ ($f_S(0)=0$) 上ノ結果ヨリ $|f'_S(0)|$ ハ S ノ muroton abnehmende Funktion デアルコトガワカル。

次ニ ω ヨリ長サ無限小ノ Schlitz γ ヲ入レルトキ内部ノ Abbildungsmodul ガ γ ノ方向ニヨリ如何ニ変化スルカヲ考察スル。

ω ヲ analytische Jordanbogen C 上ノ regulär ナ点トシ，ω ニ於ケル切線ト γ トノナス角ヲ θ トスル。$|f'_\gamma(0)|$ ガ γ ノ長サガ一定ナルトキ θ ノ如何ナル値ニ對シテ最小トナルカヲ問題トスル。γ ノ長サヲ入トシ，入ハ G ノ「デメンション」ニ比較シテ極メテ小サイト假定スル。



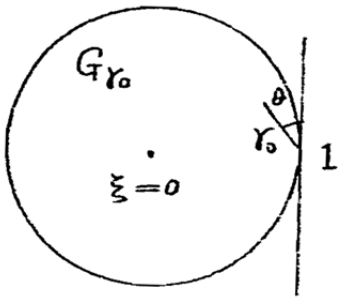
G ヲ ζ 平面ノ單位円ニ寫像スル函数ヲ $\zeta=g(\xi)$，$(g(0)=0)$ トスレバ G_γ ハ $\zeta=g(\xi)$ ニヨリ ξ 平面ノ單位円ニ Schlitz γ_0 ガ入ッタ領域ニ寫像セラレル。γ_0 ハ單位円周上ノ一点ニ於イテ Tangent トθナル角ヲナス無限小ノ Strecke デアル。コノ領域ヲ z 平面ノ單位円ニ寫像スル函数ヲ $\xi=h_{\gamma_0}(z)$，$(h_\gamma(0)=0)$ トスル。シカルトキハ $f_\gamma(z)=g(h_{\gamma_0}(z))$ デアルカラ

$$\left|\frac{df_\gamma(z)}{dz}\right|_{z=0}=\left|\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=0}\left|\frac{dh_{\gamma_0}(z)}{dz}\right|_{z=0}$$

$$=|g'(0)||h'_{\gamma_0}(0)|$$

$|g'(0)|$ ハ Schlitz γ ニハ無関係ナ因数デアルカラ、以下ニ於テハ專ラ $|h'_{\gamma_0}(0)|$ ヲ考察スル。

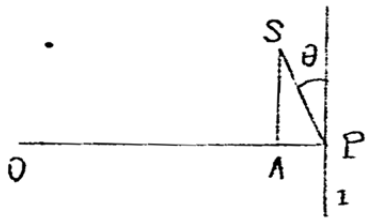
ξ 平面ノ單位円ニ $\xi=1$ ヨリ長サ入ナル線分ノ Schlitz γ_0 ヲ入レル。入ハ 1（單位円ノ半徑）ニ比較シテ極メテ小サイ数トスル。且ツ γ_0 ハ $\xi=1$ ニ於ケル切線ト角θヲナス。コノ領域ヲ z 平面ノ單位円ニ寫像スル函数ヲ $z=g_{\gamma_0}(\xi)$



($\varphi_{\gamma_0}(0)=0$) トスル。コレハ $\zeta=h_{\gamma_0}(z)$ ノ逆函数デアル。

$$\Psi(\zeta)=\log\left|\frac{\varphi_{\gamma_0}(\zeta)}{\zeta}\right|$$

ト置ケバ $\Psi(0)=\log|\varphi'_{\gamma_0}(0)|$ デアル。



$\Psi(\zeta)$ ハ G_{γ_0} ノ Rand $|\zeta|=1$ =於イテ 0 デアル。又 Rand γ_0 ノ上デハ

(1) $\Psi(\zeta)=-\log|\zeta|$

トコロガ γ_0 ノ長サハ単位円ノ「デメンション」ニ比較シテ小サイノデアルカラ 1。上デ $\zeta=1$ ヨリノ距離Sナル点=於ケル $\Psi(\zeta)$ ノ値ハS ヨリ Radius $(0,1)$ =下シタ垂線ノ足 A =於ケル $-\log|\zeta|$ ノ値=等シイ。

$AP=S\sin\theta$ デアルカラ

(2) $\Psi(\zeta)=-\log OA=-\log(1-S\sin\theta)$ $(S<1)$

$=S\sin\theta$

故= $\Psi(\zeta)$ ハ $|\zeta|=1$ =於テ0トナリ γ_0 ノ上デハ1ヨリノ距離がSナル点=於テ $S\sin\theta$ ナル値ヲトル。シカシテ G_{γ_0} 内部=於テ、至ルトコロ正則ナル調和函数デアル。今 $\Psi(\zeta)$ ノ θ =對スル abhängigkeit ヲ考ヘルノデアルカラ $\Psi_\theta(\zeta)$ ト書クコト=スレバ

公式=ヨリ (Nevanlinna; Eindeutige analytische Funktionen 27 頁参照)

$$\mathfrak{T}_\theta(\xi)=2\int_{S=0}^{\lambda} S\sin\theta\cdot d\omega(\xi;S,\theta)$$

Schlitz γ_0 ハ二ツノ側（Ufer）ヲ有スルカラ函数2ヲ要スル。$\omega(\xi;S,\theta)$ ハ1ヨリノ長サSナル γ_0 ノ一部分ノ G_{γ_0} = 関スル harmonisches Mass デアル。（G_{γ_0}。$|\xi|=1$ ナル Rand ハソノ上ノ Randwert ガ0デアルカラ上ノ Darstellung = explizit =入ッテコナイ。）故ニ

$$\mathfrak{T}_\theta(0)=2\int_{S=0}^{\lambda} S\sin\theta\cdot d\omega(0;S,\theta)$$

コゝニ於テ次ノ差ヲ作ッテ見ル。

$$(3)\quad \mathfrak{T}_{\frac{\pi}{2}}(0)-\mathfrak{T}_\theta(0)=2\int_{S=0}^{\lambda} S(1-\sin\theta)\,d\omega(0;S,\theta)$$
$$+2\int_{S=0}^{\lambda} S\,d\left\{\omega(0;S,\tfrac{\pi}{2})-\omega(0;S,\theta)\right\}$$

(3)ノ右辺ノ第一項ハ負ニナラナイコト明カデアル。ヨッテ左辺ノ負トナラナイコトヲ云フタメニハ次ノ不等式

$$(4)\quad \omega(0;S,\tfrac{\pi}{2})-\omega(0;S,\theta)\geqq 0$$

ガ証明出来レバヨイ。コレハ anschaulich klar ト思フガケデ厳密ナ証明ハ出来ナイ。今コレニ関シテ二ツノ極端ナ場合ヲ考ヘテ見ル。

I) γ_0 ガ単位円周ノ一部ニ重ナル場合.（$\theta=0$, 又ハ π）

II) γ_0 ガ単位円周ニ垂直ナル場合（$\theta=\frac{\pi}{2}$）

I)ノ場合ニハ $\omega(0;S,\theta)=\frac{S}{2\pi}$. II)ノ場合ニハ(nevanlinna; 上掲. 103頁参照)

$$(5)\quad \omega\left(0;S,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1-H}{1+H}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{S}{2-S}$$

$$=\frac{S}{\pi}$$

故ニ明ラカニ

$$\omega\left(0;S,\frac{\pi}{2}\right)>\omega(0;S,0)$$

θ が0ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデ増加スルトキ $\omega(0;S,\theta)$ モ亦monotonニ増加スルト思ハレルガ、コレガ厳密ニ云ヘレバ(4)ガ証明出来タコトニナル。G_{γ_0} 内ノ任意ノ一点 ξ ニ於ケル値 $\omega(\xi;S,\theta)$ ハ θ ノ連続函数デアルコトハ明瞭デアルガ、ソノ極大値ニ関シテハ何モ云ヘナイ。更ニ考究ヲ続ケテ他日本誌上ニ正確ナ解答ヲ述ベタイト希ツテヰル。

猶(5)ニヨツテ

$$\Psi_{\frac{\pi}{2}}(0)=2\int_0^{\lambda}S\,d\omega\left(0;S,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\lambda^2}{\pi}$$

今 $g_{\gamma_0}(\xi)=c_1\xi+c_2\xi^2+\cdots\cdots$

ト置ケバ

$$\Psi_{\frac{\pi}{2}}(0)=\log\left|\frac{h_{\gamma_0}(\xi)}{\xi}\right|_{\xi=0}=\log|c_1|,$$

故ニ

$$|c_1|=e^{\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

(4)ガ証明出来タナラバ、云ハレル事柄ハ次ノ通リデアル。

単位円周上ノ一定点ヨリ長サ入ナル Schlitz ヲ入レタ領域ヲ ζ 平面ノ単位円ニ写像スル函数ヲ $z=\varphi_{\gamma_0}(\zeta)$ トスレバ

$$\left|\varphi'_{\gamma_0}(0)\right| \leqq e^{\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

但シ入ハ I ニ比較シテ極メテ小サイト仮定スル。

$\left|\varphi'_{\gamma_0}(0)\right|\left|h'_{\gamma_0}(0)\right|=1$ デアルカラ

$$\left|h'_{\gamma_0}(0)\right| \geqq e^{-\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

故ニ最初問題ニシタ $\left|f'_{\gamma}(0)\right|$ ノ最小値ハ $e^{-\frac{\lambda^2}{\pi}}\left|g'(0)\right|$ トナル。

$(\lambda=\overline{\lambda}\left|g'(\omega)\right|,\quad g'(\omega)\neq 0)$