



Title	topological group ノ微分可能性ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 141, p. 185-189
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74551
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

626. *topological group* / 微分
可能性 = 就テ

吉田耕作 (阪大)

I. 距離付けラレタ環 R = 横ハル群 $\mathcal{O}$ が Lie 群ナル
ル 爲 = 必要且充分ナ條件ハ

α) $\mathcal{O}$ が *complete* ナリ

β) $\mathcal{O}$ が 微分可能且ツ

γ) $\mathcal{O}$ / Lie-ring が有限次元

= ヨツヲ與ヘラレ且ツ之レ等ノニ條件ハ $\mathcal{O}$ / *local com-*

compactness と *equivalent* ナコトヲ先ニ得タ。(談話 280, 291, 298, 337)。

コノ $\mathcal{O}$ が komplete ト云フノハ $\mathcal{O}$ ノ *fundamentalfolge* $\{T_i\}$, $\lim T_i T_j^{-1} = E$, 又 $\lim T_i^{-1} T_j = E$ ナル如キ $\mathcal{O}$ ノ *element* T ヲ定メルコト。

$\mathcal{O}$ が 微分可能 ト云フノハ $T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ ナルゴトキ $\mathcal{O}$ ノ *Folge* $\{T_i\}$ = 對シ, 適當 = 實數列 $\{\varepsilon_{i'}\}$, $\varepsilon_{i'} \neq 0$, ト $\{T_i\}$ ノ適當ナ部分列 $\{T_{i'}\}$ ヲ撰ベバ

$$\lim_{i' \rightarrow \infty} \frac{T_{i'} - E}{\varepsilon_{i'}} = U (\neq 0) \in \mathcal{R}$$

ナルコトデアアル。上ノ如クシテ得ラレル 微分係数 U ノ全体 =, $\mathcal{R}$ ノ 0 ヲ付ケ加ヘタモノヲ $\mathcal{J}$ トスレバ $\mathcal{J}$ ハ

$$X, Y \in \mathcal{J} \text{ ナラバ}$$

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathcal{J}$$

ナル如キ *real linear space* デアル。コノ $\mathcal{J}$ ヲ $\mathcal{O}$ ノ Lie ring ト呼ブ。

ココ = ハ β カラ γ ノ出ルコトヲ示シタイ。即チ β ハ 既ニ $\mathcal{O}$ = 對スル “*compactness*” ノ要求 = ナツテアルノデアアル。

証明. $\lim (T_{i'} - E)/\varepsilon_{i'} = U$ カラ
 $\lim |T_{i'} - E|/|\varepsilon_{i'}| = |U| \neq 0, \infty$ ヲ得ルカラ
 $\lim (T_{i'} - E)/|T_{i'} - E| = U/|U|$ 。即チ $\mathcal{O}$ が微分可能ト云フコトハ $T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ ナル如キ $\mathcal{O}$ ノ *Folge*

$\{T_i\} = \text{對シ } \mathbb{R} \text{ の Folge } \{\pm(T_i - E)/|T_i - E|\}$ が compact ト云フコトデアル。

今 $\mathcal{O}$ が微分可能トシ且ツ $\mathcal{O}$ の Lie-ring $\mathcal{J}$ が有限ナ Base フモテナイトスル。然ラバ $\mathcal{J}$ ハ real linear space タカラ, induction = ヨリ,

$$|U_i| = 1, \quad |U_i - U_j| \geq \frac{1}{2} \quad \text{for } i \neq j$$

ナルゴトキ $\mathcal{J}$ の 無限部分列 $\{U_i\}$ が存在シナケレバナラナイ。

微分係数ノ定義ト $|U_i| = 1 = \text{ヨリ}$

$$\left| \frac{T_i - E}{\pm |T_i - E|} - U_i \right| \leq \frac{1}{i} \quad \left(\begin{array}{l} \text{符号} \pm \text{ハ } i = \text{depend} \\ \text{シラドチラカトル} \end{array} \right)$$

ナル如キ $\mathcal{O}$ の Folge $\{T_i\}$, $T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ が存在スル筈デアル。

然ッ $|U_i - U_j| \geq \frac{1}{2}$ for $i \neq j = \text{ヨリ } \mathbb{R} \text{ の Folge } \{(T_i - E)/|T_i - E|\}$ ハ compact デナイ。之ハ $\mathcal{O}$ の 微分可能性 = 反スル。

—— 以上 ——

II. 上ノ結果ハ n -次元 euclid 空間 $E =$ 於ケル解析変換 $M \rightarrow M'$, topological group-germ = モ應用デキル。

即チ $\mathcal{O}$ フ E ノ領域トスルトキ変換

$$M \rightarrow M', \quad M' = \mathcal{O}(M) \quad (M \in \mathcal{O}, M' \in E)$$

ハ点 M' ノ坐標 $\mathcal{O}'(M), \dots, \mathcal{O}^n(M)$ が点 M ノ坐標 $M', \dots, M^n$ ノ解析函数ナルトキ = 解析変換 ト呼バレル。

$\mathcal{O}$ が定義サレタニツノ解析変換 T, S ノ 距離ヲ

$$d(\mathcal{O}, T, S) = \max_{M \in \mathcal{O}} |T(M) - S(M)|$$

ニヨツテ定義スル。コゝニ $\mathcal{O}$ ハ $\mathcal{O}$ ノ内部ニ横ハル

fixed closed domain トシ、一般ニ $|T(M) - S(M)|$ ハ $T(M) - S(M)$ ノ坐標ノ $\max$ ヲ表ハス。

諸 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ が定義サレタ解析変換ノ集合ニ距離 $d(\mathcal{O}, T, S)$ ニヨツテ *topological group-germ* ナアルトスル。

$\mathcal{O}$ ノ微分可能性ヲ次ノゴトク定メル。 T_i ヲ $d(\mathcal{O}, T_i, E) \neq 0$, $\lim d(\mathcal{O}, T_i, E) = 0$ ナル如キ $\mathcal{O}$ ノ Folge トスレバ、適當ニ Teilfolge $\{T_{i'}\}$ 及ビ實数列 $\{\varepsilon_{i'}\}$, $\varepsilon_{i'} \neq 0$ ヲトレバ $\mathcal{O}$ ノ 内部 デー様ニ

$$\lim_{\varepsilon_{i'}} \frac{T_{i'}(M) - M}{\varepsilon_{i'}} = \psi(M) \neq 0$$

が成立スル (Fröbel 式収斂)。コゝニ収斂ト云フノハ各坐標ノ収斂スルコト、又 $\psi(M) \neq 0$ ト云フノハ $\psi(M)$ ノどれカ一ツノ坐標 $\neq 0$ ナルコトデアル。

上ノ如クシテ得ラレル $\psi(M)$ ($\mathcal{O}$ ノ 内部 デ定義サレタ解析函数 n ヲノ system) ヲ $\mathcal{O}$ ノ 微分係数 ト名ヅケル。 $\mathcal{O}$ ノ微分係数全体 $= \psi(M) \equiv 0$ ヲ付ケ加ヘタモノヲ $\mathcal{O}$ ノ Lie-ring ト呼ブ。

備テ $H. Cartan = \text{ヨレバ}$ (*Actuarites Sc. et industrielles* 198) $\mathcal{O}$ が *locally euclidian of finite dimension* デ且ツ微分可能 ($Cartan$ ハ $\mathcal{O}$ が *propriété [P]* ヲ満足スルト云ツテアル) トラバ $\mathcal{O}$ ハ *Lie / group-germ* デアル。

所ガ $Cartan$ ノ証明ヲ讀ンデミルト *l. e. of finite d.* ト云フ條件ハ

$\alpha)$ $\mathcal{O}$ が *komplete*

$\beta)$ $\mathcal{O}$ ノ *Lie-ring* $\mathcal{T}$ ガ有限次元

ト云フコト = シカ使ツテヲライ。

$\alpha) = \mathcal{O}$ が *komplete* ト云フノハ $d(d_i, T_i, T_j) = 0$ ナルゴトキ $\mathcal{O}$ ノ Folge $\{T_i\}$ ハ $d(d_i, T_i, T) = 0$ ナルゴトキ $\mathcal{O}$ ノ変換 T ヲ定メルコトデアル。

又 $Cartan = \text{ヨレバ}$ (p. 34) $\mathcal{O}$ が *komplete* トラバ $\mathcal{T}$ ハ *real linear space* デアル。故ニ I ト全ク同様ニシテ $\alpha)$ 及ビ $\mathcal{O}$ ノ微分可能性カラ $\beta)$ ガ出ル。

即チ $\mathcal{O}$ が *Lie group-germ* ナルノ必要條件ハ *kompleteness* ト微分可能性ニヨツテ與ヘラレル。

何レニシテモ 次元假定 ヲ表面ニ現ハサズニスム譯デス。