



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就イテ, X II
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 143, p. 213-218
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74560
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

635. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就イテ, VII

福原 満洲雄 (九大)

1. 今度ハ

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = y f(x, y)$$

ニ於テ

$$(2) \quad f(x, y) = \sum_{j,k} a_{jk} x^j y^k$$

$$(a_{00} = \dots = a_{0,n-1} = 0, \quad a_{0n} \neq 0)$$

ナル形ニ展開サレル場合ヲ考ヘル。

形式的解 先ツ (1) ノ形式的ノ解ヲ求メル爲メ

$$(3) \quad y = z \sum_{j,k} p_{jk} x^j z^k \quad (p_{00} = 1)$$

ナル置換ヲ行フ。 \$z\$ = 関スル方程式ハ

$$x \frac{dz}{dx} = z \sum_{j,k} C_{jk} x^j z^k$$

ナル形ヲ持ツ。 \$C_{0n}, C_{0,2n}\$ ヲ除キ其ノ他ノ \$C_{jk}\$ ヲ 0 トス

ルヤウニ (3) ノ展開式ノ係数 \$p_{jk}\$ ヲキメルコトが出来ル。

勿論級数ノ収斂性ハ考慮ニ入レテナイ、ソノヤウニ \$p_{jk}\$ ヲキメタモノトスレバ変換サレタ方程式ハ

$$(4) \quad x \frac{dz}{dx} = C z^{n+1} + C' z^{2n+1}$$

ナル形ヲ持ツ。又テ (4) ノ一般解トスレバ (3) が (1) ノ形式的ノ解トナル。

2. 次ニ方程式 (4) ノ始末ヲアル。 $x^{-n} = u$ ト置ケバ (4) ハ

$$xu' = -nc - nc'u^{-1}$$

トナル。更ニ $v = Au$, $\xi = x^p$ ト置ケバ

$$\xi \frac{dv}{d\xi} = -\frac{nA}{p} \left(c + c' \frac{A}{v} \right)$$

トナル。

$$(5) \quad A = \frac{c}{c'}, \quad p = -\frac{nc^2}{c'}$$

ト取レバ

$$\xi \frac{dv}{d\xi} = 1 + v^{-1}$$

トナル。最後ニ $t = \log \xi$ ト置クコトニヨリ

$$(6) \quad \frac{dv}{dt} = 1 + v^{-1}$$

ヲ得ル。 $t=0$ テ $v=0$ トナル (6) ノ解 ($t=0$ ハ分岐点ナル) ヲ $v = \alpha(t)$ ト書クコトニスル。 (6) ノ一般解ハ $v = \alpha(t+C)$ ト書クコトが出來ル。依ッテ (4) ノ解ハ

$$(7) \quad x = \left(\frac{1}{A} \alpha(p \log x + C) \right)^{-\frac{1}{n}}$$

トナル。 A, p ハ (5) ニ依ッテ與ヘラレル。 C ハ勝手ナ常数

デアル、以上ハ $C' \neq 0$ ノ場合デアル。 $C' = 0$ ノ場合ニハ (4) ノ一般解ハ

$$(1') \quad z = (-nc \log x + C)^{-\frac{1}{n}}$$

デアル。

3. (4) ノ一般解ガ (1') 又ハ (1') = 依ッテ與ヘラレルカラ之レヲ (3) = 入レルト (1) ノ形式的ノ解ガ得ラレルノデアル。結論ヲ大雑把ニ言ヘバ此ノヤリニシテ得ラレタ級数 (3) ガ (1) ノ一般解ヲ漸近的ニ表ハスノデアルガ、本論ニ入ルニ先ツテ $v(0) = 0$ ヲ満足スル (6) ノ解 $v = \alpha(t)$ ノ性質ヲ調べテ置カトケレバナラナイ。

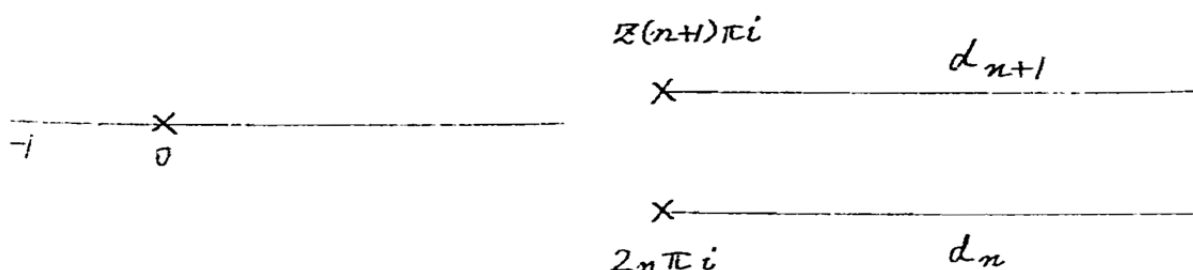
(6) ヲ積分シテ $\alpha(0) = 0$ デアルコトニ注意スレバ

$$(8) \quad \alpha - \log(1 + \alpha) = t$$

ヲ得ル。(6) ハ $v = -1, \infty$ ナル解ヲ持ツカラ $\alpha(t)$ ハ $-1, \infty$ ナル値ヲ取ラナイ。依ッテ $\alpha(t)$ ノ特異点ハ $\alpha = 0$ トナル点即チ $t = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$ デアル。(8) = 依ッテ α 平面 = 於テ實軸上ノ $-1, +\infty$ ヲ結ブ半直線ニ沿ッテ切レ目ヲ

α 平面

t 平面



入レター一枚ノ平面 G が右平面ニ於テ $2n\pi i, 2(n+1)\pi i$ 一端トシ, 實軸ト平行ニ右ニ伸ビタニツノ半直線 d_n , d_{n+1} = 沿ツテ切レ目ヲ入レター一枚ノ平面 F_n = 一對ニ對應スル. コノ對應ニ於イテ Ω 平面ニ於ケル $(0, +\infty)$ ノ上ノ縁 = 右平面ニ於ケル d_{n+1} ノ上ノ縁が, Ω 平面ニ於ケル $(-1, 0)$ ノ上ノ縁 = 右平面ニ於ケル d_{n+1} ノ下ノ縁が, Ω 平面ニ於ケル $(-1, 0)$ ノ下ノ縁 = 右平面ニ於ケル d_n ノ上ノ縁が, Ω 平面ニ於ケル $(0, +\infty)$ ノ下ノ縁 = d_n ノ下ノ縁が對應スル. 尤 d_n ト d_{n+1} ノ間カラ ∞ = 近ヅケバ $\Omega \rightarrow -1$ トナリ, 尤 d_n ト d_{n+1} ノ間ニ入ラヌ ∞ = 近ヅケバ $\Omega \rightarrow \infty$ トナル. 又 d_n ノ上ノ縁ノ点ト, ソレニ對應スル d_{n+1} ノ下ノ縁ノ点トニ對應スル Ω ノ値ハ等シイ. 依ツテ $\Omega(t)$ ノ Riemann 面ハ F_n, d_n ノ上ノ縁ヲ F_{n-1} ノ d_n ノ下ノ縁トツナギ, F_n ノ下ノ縁ヲ F_{n-1} ノ d_n ノ上ノ縁トツナグコトニヨツテ得ラレル.

4. Ω ヲ與ヘテ左勝手ナ角トシ, R ヲ十分ニ大キク取レバ, 以上述べタ所カラ次ノ事實ガ分ル.

$|t_0| \geq R$ デ t_0 ハ d_0, d_1 ノ間ニナイ F_0 ノ上ノ点トスル. 尤 t_0 カラ出テ $|t| \geq R, |\arg t| \leq \Omega$ ナル部分ニ属シタガ ∞ = 近ヅケバ $\Omega(t) \rightarrow \infty$ トナル.

$\Re t_0 > 0, 0 < \Im t_0 < 2\pi$ ナル F_0 ノ上ノ点 t_0 カラ出テ $|\arg t| < \frac{\pi}{2}, \Re t \rightarrow +\infty$ トナルヌ t が ∞ = 近ヅケバ $\Omega(t) \rightarrow -1$ デアル.

5. $02 = t(1+w)$ ト置ケバ (8) ハ

$$w = t^{-1} [\log t + \log(1+w+t^{-1})]$$

トナル。

コノ右辺ハ t^{-1} , $t^{-1} \log t$, w ノ冪級数 = 展開サレル。而モ其等 = 関シテ 0 次ノ項ハ 0, 一次ノ項ハ $t^{-1} \log t$ ダケデアアル。依ツテ

$$w = t^{-1} \log t + \dots$$

ナル形 = 展開サレル。書イテナイ部分ハ t^{-1} , $t^{-1} \log t$ ノ冪級数デ, 其等 = 関シテ 0 次又ハ一次ノ項ヲ含マナイ。コレカラ

$$(9) \quad 02(t) = t(1 + t^{-1} \log t + \dots)$$

ヲ得ル。此ノ展開式ハ $t \rightarrow \infty$ ノトキ $02(t) \rightarrow \infty$ トナル $02(t)$ ノ値ヲ與ヘル。

$02 = -1 + w$ ト置ケバ (8) ハ

$$w = e^{1-t-w}$$

トナル。コレカラ

$$w = e^{1-t} (1 + \dots)$$

ナル展開式ヲ得ル。書カレテナイ部分ハ e^{-t} ノ冪級数デ 0 次ノ項ヲ含マナイ。依ツテ

$$(10) \quad 02(t) = -1 + e^{1-t} + \dots$$

ナル展開式ヲ得ル。コレハ $t \rightarrow \infty$ ノ時 $02(t) \rightarrow -1$ トナル $02(t)$ ノ値ヲ與ヘル。

以上 $02(t)$ = 就イテ述ベタ事柄ガスベテ必要ナノデハナイ。序デアアルカラ述ベタ迄アツテ今後必要ナノハ展開式

(9) テアイル。