The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	領域ノ移動ニヨル Dirichletノ問題ノ解ノ変化ニツイテ（續）
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 143, p. 218-222
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74561
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

636. 領域ノ移動ニヨル Dirichlet ノ問題ノ解ノ変化ニツイテ(續)

井上　正雄(阪大)

本誌136號603ニヲイテ Ω ニ收斂サス領域列ヲ(142号629ニヲケル結果ヲ除イテ)全部 regular ニ限ツタガコノ regularity ヲ除去シテモ議論ニハ何等差支ヘガナイコトガワカル。ソレニハ第一ニ"有界ナ調和函數ハソノ regular ナ境界点ノ値ノミニヨッテ定マル"コトニ注意スレバヨイ。第二ニハ條件(C)ヲ有スルトキノ証明ニヲイテ、不等式

$$V(z;\ z_{n'}) \leqq V(-|z-z_{n'}|) \qquad (*)$$

ノ矢張リ成立スルコトヲ云ヘバヨイ。[1] 談話603デハコノ証明モ省略シタガ、茲ニコノ不等式ヲ $\Omega_{n'}$ ノ regularity ヲ除去シテ証明スル。

---

1) 629ニヲケル談話ノ結果ニハ $\{\Omega_n\}$ ノ regularity ノ不必要ナコトハ Ω_n ガ有限次連結領域ダカラ，ソノ irregular ナ境界点ハ孤立点以外ニナイコトヲ注意スレバヨイ。

ソノタメ使用スベキ Beurling ノ定理[2] ハ次ノ如キモノデアル。

Ω ヲ有界ナ次ノ如キ性質ヲ有スル領域トスル：

$E_{\Omega,0}$ ガ實軸上ノ有限個ノ segment L;

$$L \begin{cases} (r_\nu, r'_\nu) & \nu = 1, 2, \cdots\cdots n \\ 0 \leqq r_1 < r'_1 < r_2 < r'_2 < \cdots\cdots < r'_n \leqq R \end{cases}$$

ニ一致スルカ或ハ之レヲ含ム。コヽニ R ハ Ω ヲ含ム円ノウチ最小ノ円ノ半徑デアル。$U(z)$ ヲ Ω 内デ一價調和函数トシ，Ω ノスベテノ境界点 z ニテ $\overline{\lim}\, U(z) \leqq f(|z|)$ トスル，但シ $f(r)$ ハ閉區間 $[0, R]$ ニテ定義サレタ $\log r$ ノ凸函数デアリ，$f(0+0) = f(0) < +\infty$，$f(R-0) \leqq f(R) < +\infty$. シカルトキ，円 $|z| < R$ ニ L ナル cut ヲ入レタ領域 $\triangle$ 内ニテ，コノ境界点 z ニヲイテ $f(|z|)$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $V(z)$ トスルトキ

$$U(z) \leqq V(-|z|)$$

コノ定理ヲ不等式(※)ニ直接應用スルコトハ出來ナイ。第一 $\Omega_{n'}$ ノ irregular ナ境界点ニヲイテ $\overline{\lim}\, U(z) \leqq f(|z|)$ ナル関係ガ不明デアリ[3] 且ツ projection ガ有限個ノ segment カラナツテイルカドウカモワカラナイ。

---

2) コノ定理ハ今迄度々引用シタモノデアル。Beurling ハモウ少シ一般ナ假定ノモトニ之レヲ証明シテイル。Thèse. (Upsal, 1933) p. 52。

3) シカモ $\underline{\lim}\, U(z) \geqq f(|z|) = r$ スラ出ルノデアル。

コノニツヲ次ノ如キ手段ニヨツテ切リ抜ケルコトガ出来ル。

$$\Omega_{n'} = \Omega, \quad z_{n'} = 0$$

トオイテ

$$V(z;0) \leqq V(-|z|)$$

ヲ証明スル。

先ヅ Ω ヲ次ノ如キ *regular domain* ノ系列 $\{\Omega_i\}$ デ近似スル。

1° $\Omega \supset \cdots\cdots \supset \Omega_{i+1} \supset \Omega_i \supset \cdots\cdots \supset \Omega_1$

2° $\lim_{i\to\infty} \Omega_i = \Omega$

3° $E_{\Omega_i,0}$ ガ有限個ノ *segment* カラナツテイル。

コノコトノ可能ナルコトハ Ω ヲ *réseau* ニ分ケテコレカラ作ラレル有限次連結ナ領域（開集合）デ近似シテユケバヨイ。Ω_i ノ境界点 z ニヲイテ $|z|$ ナル値ヲトル Ω_i デノ調和函数ヲ $V_i(z)$ トスレバ

$$\lim_{i\to\infty} V_i(z) = V(z;0)$$

デアル。

サテ次ノコトガ云ヘルコトヲ注意シヤウ。

Projection ヲ作ルベキ ζ 平面上デ δ ヲ充分小サイ正数トスルトキ，充分先ノスベテノ i ニ對シテ，$E_{\Omega_i,0}$ ガ *segment* l_δ : $0 \leqq \zeta \leqq \rho(E_{\Omega,0}) - \delta$ ヲ含ム。コヽニ $\rho(E_{\Omega,0})$ ハ $E_{\Omega,0}$ ノ原点ヲ含ム *segment* ノ長サ

デアル。

コノコトハ $\mathfrak{D}_i$ ノ作リ方ヨリシテ明ラカデアル。

故ニ充分大キクトッタ円E（⊃$E_{\mathfrak{D}_i, 0}$ハ充分先ノスベテノ i ニ對シ）＝ $E_{\mathfrak{D}_K, 0}$ ⊃ l_δ ナルーツノ $K(\delta)$ ヲ定メ，E＝cut l_δ ノ入ッタ領域 $\Delta_{K(\delta)}$ ニ関シテ境界点 ξ ニテ $|\xi|$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $V(\xi; \Delta_{K(\delta)})$ トスレバBeurling ノ定理ヲ使ッテ[4)]

$$V_{K(\delta)}(z) \leqq V(-|z|; \Delta_{K(\delta)})$$

$\{\delta_i\}$ ヲ $\delta_i \downarrow 0$ ナルゴトク撰ビ各々ノ δ_i ニ對シ $K(\delta_i) < K(\delta_{i+1})$ ナル如ク上ノ方法デ $\Delta_{K(\delta_i)}$ ヲ作リ函數 $V(\xi; \Delta_{K(\delta_i)})$ ヲ作レバ

$$V_{K(\delta_i)}(z) \leqq V(-|z|; \Delta_{K(\delta_i)}) \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

シカルニ $\Delta_{K(\delta_i)} \to \Delta_{K(0)}$；

コヽニ $\Delta_{K(0)}$ ハ

$$E = \text{cut } l_0 : \ 0 \leqq \xi \leqq \rho \ (E_{\mathfrak{D}, 0})$$

ヲ入レタ領域，且ツコノ領域列ハ條件（C）ヲ満足シテイルカラ，談話603ニヲイテ不等式（※）ヲ導イタトキト同ジ方法ヲ $\{\Delta_{K(\delta_i)}\}$ ニ繰リ返セバ，$V(z; z_n)$, $V(\xi)$ ニ對應スル函數ヲ夫々 $v(\xi; \xi_i)$, $v(\zeta)$ トスルトキ不等式

$$v(\xi; \xi_i) \leqq v(-|\xi|)$$

ハ Beurling ノ定理ヲソノマヽ使ッテ云ヘル。

---

4) 半径ヲ充分大キク取ッテハアルガ $|\xi|$ ガ劣調和函数ナルコトニ注意スレバコノ不等式ノ成立スルコトガワカル。

ヨッテ

$$\lim_{i\to\infty} V_{K(\delta_i)}(z) = V(z;0)$$

$$\leqq \lim_{i\to\infty} V(-|z|;\Delta_{K(\delta_i)}) = V(-|z|;\Delta_{K(0)})$$

シカルニ E ニ條件(C)ニヨケル共通線分 $l(\leqq l_0)$ ナル cut ヲ入レタ領域ニ對シテ作ッタ函數ヲ $V(\xi)$ トシタノデアルカラ

$$V(-|z|;\Delta_{K(0)}) \leqq V(-|z|)$$

故ニ，結局

$$V(z;0) \leqq V(-|z|)$$

(証明了)

コレデ不等式(※)ガ必ズシモ regular デナイ領域ニ對シテモ成立スルコト即チ談話603ニヨイテ $\{\Omega_n\}$ ヲ regular domain ノ系列ニ限ル必要ノナイコトガワカッタ。

猶，コノ事實ヲ使ッテ境界点ガ regular ナルタメノ充分條件ヲ與ヘルコトガ出来ル。コノコトヲ次号ニテ改メテ述ベヤウ。