



Title	Löwnerノ定理ニ就イテ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 144, p. 231-239
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74564
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

639. Löwner / 定理 = 就イテ

城 憲 三 (阪大工)

Löwner の Annalen Bd. 89 (1923) = 於テ
 $|z| < 1$ デ 函数

$$f(z) = e^{-t_0} (z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots), \quad |f(z)| \leq 1, \\ (t_0 \geq 0)$$

が 正則 デ 單葉 ナ ル トキ ハ (コゝ = 係數 $b_1, b_2, \dots$ ハ t_0 ノ
 函数),

$$(1) \quad |b_1| \leq 2(1 - e^{-t_0}), \\ (2) \quad |b_2| < 3 - 4e^{-t_0} + e^{-2t_0}$$

ナルコトヲ 証明 シタ。

(1) ハ Pick ノ 結果 = 他ナラズ, ソノ 等号ハ 函数

$$(3) \quad \frac{f(z)}{(1 + \varepsilon f(z))^2} = e^{-t_0} \frac{z}{(1 + \varepsilon z)^2}, \quad |\varepsilon| = 1$$

ノ トキ = 成立スル。實際 (3) 式カラ

$$f(z) = e^{-t_0} (z - 2\varepsilon(1 - e^{-t_0})z^2 \\ + \varepsilon^2(3 - 8e^{-t_0} + 5e^{-2t_0})z^3 + \dots)$$

ヲ 得ル。

シカシナガラ, Löwner ニ 注意 シテ 非 $\checkmark$ マ $\checkmark$ = (2) ハ
 Scharf + Schranke ヲ 與ヘテ 非ナ $\checkmark$ イ。唯 $t_0 \rightarrow \infty$ =
 對シ

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{e^{-t_0}} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} (z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots)$$

$$= z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

トオケバ, (1), (2), 系トシテ

$$(1') \quad |a_2| \leq 2 \quad (\text{Bieberbach})$$

$$(2') \quad |a_3| \leq 3 \quad (\text{Löwner})$$

が得テレ, 之等ハ *Scharf* トナル。

本論ノ目的ハ不等式 (2) ヲ *Scharf* + ϵ ノ = スレコト
デアル、之ハマタ分ツテキナイ。^(*)

§ 1. 我々ノ目的ノタメニ, 先ヅ *Valiron-Landau*
ノ定理^{**)} ヲ書キ変ヘナケレバナラヌ。

定理 1. 實函數 $\lambda(\tau)$ ハ $t_0 \leq \tau \leq \infty$ デ高々一^一点ヲ
除イテ連続ナ

$$|\lambda(\tau)| \leq e^{-\tau}$$

トスル、又 $0 < N \leq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ トシ,

$$\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau) d\tau \leq N$$

トスル、コノトキハ

$$\left| \int_0^{t_0} \lambda(\tau) d\tau \right| \leq V(N),$$

コノ = $V = V(N)$ ヲ, $t_0 e^{-2t_0} \leq N \leq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ ナル
トキハ

*) E. Peschl, Zur Theorie der schlichten Funktionen, *Journal für Math.* 176 (1936), S. 61-94.
Teil II, 最後参照。

**) *Math. Zeitschr.* 30, (1929), S. 630

$$\left(\nu + \frac{1}{2}\right)e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0} = N, \quad t_0 \geq \nu \geq 0$$

1 根トシテ, $0 < N < t_0 e^{-2t_0}$ ナルトキハ $\nu(N) = t_0$ ト定メ

$$\nabla(N) = (\nu + 1)e^{-\nu} - e^{-t_0}$$

デアアル。

注意 $\nu = \nu(N)$ ハ常ニ唯一ツ定マル、ソレハ ν ノ函数 $(\nu + \frac{1}{2})e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0}$ ハ微係数 $-2\nu e^{-2\nu} < 0$ ヲ有シ、 ν ガ 0 カラ t_0 マデ増加スレバ、函数値ハ $\frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ カラ $t_0 e^{-2t_0}$ マデ変ルカラデアアル。

証明. (A) $0 < N < t_0 e^{-2t_0}$ ナルトキハ $\nabla(N) = t_0 e^{-t_0}$ トナルガ、

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_0} \lambda(\tau) d\tau \right| &\leq \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)| d\tau \leq \sqrt{\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau) d\tau} \int_0^{t_0} d\tau \\ &\leq \sqrt{t_0 e^{-2t_0}} t_0 = t_0 e^{-t_0} \end{aligned}$$

$$(B) 1 \quad \mu(\tau) = \begin{cases} e^{-\nu}, & 0 \leq \tau \leq \nu, \\ e^{-\tau}, & \nu \leq \tau \leq t_0. \end{cases}$$

ト定メルト、

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_0^{t_0} \mu^2(\tau) d\tau &= \int_0^{\nu} e^{-2\nu} d\tau + \int_{\nu}^{t_0} e^{-2\tau} d\tau \\ &= \left(\nu + \frac{1}{2}\right)e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0} = N \leq \int_0^{t_0} \lambda^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

而シテ $t_0 \geq \tau \geq 0$ = 於テハ

$$(5) \quad (\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|)(2e^{-\nu} - \mu(\tau) - |\lambda(\tau)|) \geq 0$$

デアアル、何トナレバ、 $0 \leq \tau \leq \nu$ ナルトキハ左辺ハ $(e^{-\nu} - |\lambda(\tau)|)^2$ = シテ、 $\nu \leq \tau \leq t_0$ ナルトキハ

$$e^{-\nu} \geq \mu(\tau) = e^{-\tau} \geq |\lambda(\tau)|$$

が成立スルカラデアアル。依ツテ (5) ヨリ

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{t_0} (\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|) (2e^{-\nu} - \mu(\tau) - |\lambda(\tau)|) d\tau \\ &= 2e^{-\nu} \left(\int_0^{t_0} \mu(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)| d\tau \right) - \int_0^{t_0} \mu^2(\tau) d\tau + \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)|^2 d\tau \end{aligned}$$

(4) が成立スルカラ、從ツテ

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_0} \lambda(\tau) d\tau \right| &\leq \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)| d\tau \leq \int_0^{t_0} \mu(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\nu} e^{-\nu} d\tau + \int_{\nu}^{t_0} e^{-\tau} d\tau = \nu e^{-\nu} + e^{-\nu} e^{-t_0} = \nabla (N) \end{aligned}$$

2. 實際 $\lambda(\tau) = \mu(\tau)$ ナラバ、

$$\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau) d\tau = N, \quad \int_0^{t_0} \lambda(\tau) d\tau = \nabla (N)$$

デアアル。

§ 2. 定理 2. $\kappa(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}$ τ $t_0 \geq \tau \geq 0$ デ高々一
点ヲ除キ連続トシ、 $|\kappa(\tau)| = 1$ ニシテ

$$0 < M \leq \frac{1}{2} (1 - e^{-2t_0})$$

トスル。モ、

$$\left| \int_0^{t_0} \kappa^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right| \leq M$$

ナラバ

$$\left| \int_0^{t_0} \kappa(\tau) e^{-\tau} d\tau \right| \leq \nabla \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0} \right)$$

(∇ , 定義ハ § 1 ノ通り)

上式ノ等号ノ成立スルヤウナ $K(\tau)$ が存在スル。

証明. 1 一般性ヲ失ハズ $\int_0^{t_0} K(\tau) e^{-\tau} d\tau \geq 0$ トスル。
(然ラザルトキハ $K(\tau)$ ノ代リ $= \varepsilon K(\tau)$, $|\varepsilon|=1$ ノ考フレ
バヨシ)、スルト假定カラ

$$\begin{aligned} M &\geq \Re \int_0^{t_0} K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau = \int_0^{t_0} e^{-2\tau} (2 \cos^2 \vartheta(\tau) - 1) d\tau \\ &= 2 \int_0^{t_0} e^{-2\tau} \cos^2 \vartheta(\tau) d\tau + \frac{1}{2} e^{-2t_0} - \frac{1}{2}, \\ \int_0^{t_0} e^{-2\tau} \cos^2 \vartheta(\tau) d\tau &\leq \frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0} \equiv N \\ &\leq \frac{1}{2} (1 - e^{-2t_0}), \quad N = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-2\nu} - \frac{1}{2} e^{-2t_0} \end{aligned}$$

依テ, 定理 1 = 於テ $\lambda(\tau) = e^{-\tau} \cos \vartheta(\tau)$ ト考ヘ,

$$\left| \int_0^{t_0} K(\tau) e^{-\tau} d\tau \right| = \int_0^{t_0} e^{-\tau} \cos \vartheta(\tau) d\tau \leq \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0} \right)}$$

2. 上ノ定理 = 示シタ不等式ノ等号ノ成立シ得ルコヲ示シ
テオク。

$\nu = \nu(N) = \nu \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0} \right)$ トシ, 次式ヲ満足スル
 β ヲ選ブ。

$$\int_0^\beta e^{-(\tau+\nu)} \sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}} d\tau - \int_\beta^\nu e^{-(\tau+\nu)} \sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}} d\tau = 0, \\ 0 \leq \beta \leq \nu$$

實際, 上ノ左辺ハ $\beta = 0$ ヲツイテ連続テ左辺ハ $\beta = 0$ ノトキハ ≤ 0 ,
 $\beta = \nu$ ノトキハ ≥ 0 ナルカラ β ハ求マル、ソコデ

$$\vartheta(\tau) = \begin{cases} \arccos e^{\tau-\nu}, & 0 \leq \tau \leq \beta, \\ -\arccos e^{\tau-\nu}, & \beta < \tau \leq \nu, \\ 0 & \nu \leq \tau \leq t_0 \end{cases}$$

$$\kappa(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}$$

ト定ム、スルト $\kappa(\tau)$ ハ $\tau = \beta$ ヲ除キ連続デ $|\kappa(\tau)| = 1$
デアツテ

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \kappa^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau &= \int_0^{t_0} e^{-2\tau} (2\cos^2 \vartheta(\tau) - 1) d\tau \\ &+ 2i \int_0^{t_0} e^{-2\tau} \cos \vartheta(\tau) \sin \vartheta(\tau) d\tau \\ &= 2 \int_0^\nu e^{-2\tau} \cdot e^{2\tau-2\nu} d\tau + 2 \int_\nu^{t_0} e^{-2\tau} d\tau + \frac{1}{2} e^{-2t_0} - \frac{1}{2} \\ &+ 2i \left(\int_0^\nu e^{-(\tau+\nu)} \sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}} d\tau - \int_\beta^\nu e^{-(\tau+\nu)} \sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}} d\tau \right) \\ &= 2\nu e^{-2\nu} - e^{-2t_0} + e^{-2\nu} + \frac{1}{2} e^{-2t_0} + \frac{1}{2} = M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi \quad \left| \int_0^{t_0} \kappa(\tau) e^{-\tau} d\tau \right| &\geq \Re \int_0^{t_0} \kappa(\tau) e^{-\tau} d\tau = \int_0^\nu e^{-\tau} d\tau + \int_\nu^{t_0} e^{-\tau} d\tau \\ &= \nu e^{-\nu} - e^{-t_0} + e^{-\nu} = \nabla \left(\frac{M}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t_0} \right) \end{aligned}$$

§ 3. 然レ、Löwner = ヲリ、上ノマウヲ $\kappa(\tau)$ ノ恒
レカヲ取り替ヘ、

$$b_2 = b_2(t_0) = 4 \left[\int_0^{t_0} \kappa(\tau) e^{-\tau} d\tau \right]^2 - 2 \int_0^{t_0} \kappa^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau$$

ト表ハセル。

一般性ヲ失ハズ $|b_2(t_0)| = \Re b_2(t_0)$ ト考ヘル。(コレ
モ $|\varepsilon|$ ヲ適當ニトレバ $\kappa(\tau)$ ノ代リ $= \varepsilon \kappa(\tau)$ ヲ考ヘテ可能)

依ツテ

$$\begin{aligned} |b_2(t_0)| &= \Re b_2(t_0) = 4 \left\{ \left(\int_0^{t_0} \cos \vartheta(\tau) \cdot e^{-\tau} d\tau \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_0^{t_0} \sin \vartheta(\tau) \cdot e^{-\tau} d\tau \right)^2 - \int_0^{t_0} \cos^2 \vartheta(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right\} + 1 - e^{-2t_0} \\ &\leq 4 \left\{ \left(\int_0^{t_0} \cos \vartheta(\tau) \cdot e^{-\tau} d\tau \right)^2 - \int_0^{t_0} \cos^2 \vartheta(\tau) \cdot e^{-2\tau} d\tau \right\} + 1 - e^{-2t_0} \end{aligned}$$

定理 1 を用ヒ

$$\begin{aligned} &\leq 4 \left\{ \left(\nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0} \right)^2 - \left(\nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2} e^{-2\nu} - \frac{1}{2} e^{-2t_0} \right) \right\} \\ &\quad + 1 - e^{-2t_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\nu; t_0) &\equiv 4 \left\{ \left(\nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2} e^{-2\nu} - \frac{1}{2} e^{-2t_0} \right) \right\} + 1 - e^{-2t_0} \end{aligned}$$

トオケバ

$$(6) \quad F(0; t_0) = 3 - 8e^{-t_0} + 5e^{-2t_0} \leq 3, \quad (\text{等号ハ } t_0 = \infty$$

ノトキ成立ス)

而シテ F ヲ ν = ツキ微分スルバ

$$\frac{1}{4} F'_\nu(\nu; t_0) = -2(\nu e^{-\nu} - e^{-t_0}) \nu e^{-\nu}.$$

上式ノ根トシテ $\nu = 0$ 及ビ $\nu = \nu_0$ ヲ得。但シ $0 \leq \nu_0 \leq t_0$ 。

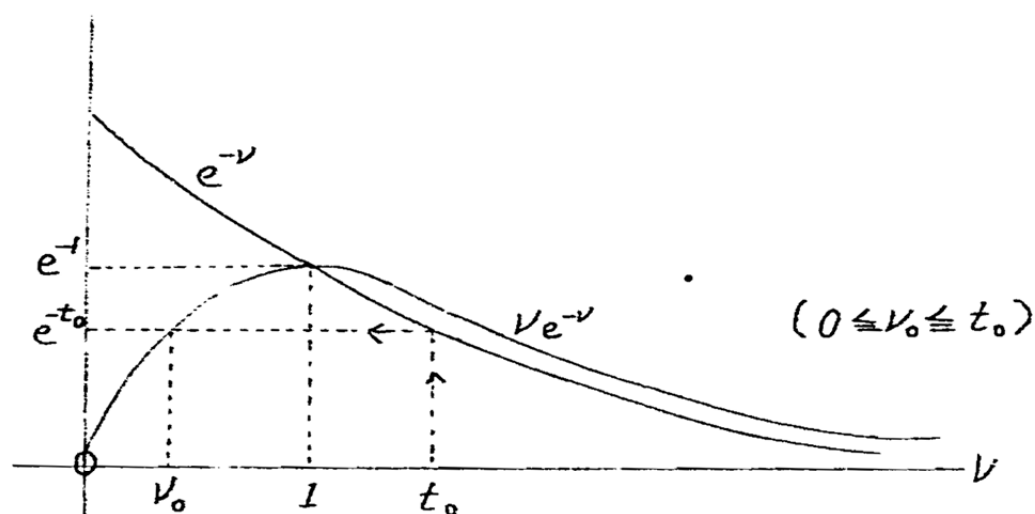
デ

$$(7) \quad \nu_0 e^{-\nu_0} = e^{-t_0}.$$

デアル。 ν_0 ハ t_0 ノ函数デ $t_0 \rightarrow \infty$ ナルトキハ $\nu_0 = \nu_0(t_0) \rightarrow 0$ トナル。

而シテ $F(\nu; t_0)$ ハ $\nu = 0$ ノトキ $Min.$ トナリ、 $\nu = \nu_0$ ノトキ $Max.$ トナル。尚 $\nu = \nu_0(t_0)$ ハ $t_0 \geq 1$ ノトキ唯一ツ存在シ、次圖ニヨリテ t_0 ト ν_0 トノ關係が分ルダロウ。

$t_0 < 1$ ナルトキハ ν_0 存在セズ。依ッテ $t_0 < 1$ ナルトキハ $\nu_0 = t_0$ トスレバヨイ。



定理3. $t_0 =$ 對シ上ノ如ク $\nu = \nu_0(t_0)$ 決定サレ,

$$\begin{aligned} \text{Max.}_{\{f\}} |b_2(t_0)| \leq & 4 \left\{ (\nu_0 e^{-\nu_0} + e^{-\nu_0} - e^{-t_0})^2 \right. \\ & \left. - \left(\nu_0 e^{-2\nu_0} + \frac{1}{2} e^{-2\nu_0} - \frac{1}{2} e^{-2t_0} \right) \right\} + 1 - e^{-2t_0} \end{aligned}$$

上ノ等号モ成立スル。

注意. 定理3 = 依ッテ, 我々ノ結論ハ, 多少興味深イコト = ハ, $|b_2(t_0)|$ ノ Max. ガ函数 (3) デ Schranke ガ與ヘラレナイコトヲ示ス。コノコトハ唯 $t_0 = \infty$ ノトキ = ノミ實現スル。

實際, 今数字的ニ, $t_0 = 1$ ト考フレバ (7) 又ハ上図カラ分カルマウ = ,

$$\nu_0(t_0)_{t_0=1} = 1$$

デアル、コノトキ = 對シ定理2ヲ示シタマウナ $\psi(\tau)$ ヲ定義スレバ, コノ $\psi(\tau) =$ 應ズル函数 = 對シ,

$$|b_2(t_0)|_{t_0=1} = 1 - e^{-2}$$

一方、函数 (3) = 對シテハ

$$b_2(t_0)_{t_0=1} = 3 - 8e^{-1} + 6e^{-2}.$$

且ツ

$$(8) \quad 1 - e^{-2} > 3 - 8e^{-1} + 6e^{-2}$$

デアル、数字的ニ明示スルナラ、(8) カラ

$$6e^{-2} - 8e^{-1} + 2 < 0$$

デアレバヨイノデアルガ、實際

$$6e^{-2} - 8e^{-1} + 2 < 6 \cdot 0,1354 - 8 \cdot 0,3678 + 2 = -0,13$$

トナル。

Löwner ノ結果 (2') ハ全ク偶然ノ場合トシテ成立シ

テキル。(丁)