OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Löwnerノ定理ニ就イテ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 144, p. 231-239
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74564
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

639. Löwner ノ定理ニ就イテ

城　憲　三（阪大 工）

Löwner ハ Annalen Bd. 89 (1923) ニ於テ $|z|<1$ デ函数

$$f(z)=e^{-t_0}(z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\cdots),\quad |f(z)|\leqq 1,$$
$$(t_0\geqq 0)$$

ガ正則デ単葉ナルトキハ（コヽニ係数 $b_1, b_2, \cdots\cdots$ ハ t_0 ノ函数），

(1)　$|b_1|\leqq 2(1-e^{-t_0})$,

(2)　$|b_2|<3-4e^{-t_0}+e^{-2t_0}$

ナルコトヲ証明シタ。

(1) ハ Pick ノ結果ニ他ナラズ，ソノ等号ハ函数

$$(3)\qquad \frac{f(z)}{(1+\varepsilon f(z))^2}=e^{-t_0}\frac{z}{(1+\varepsilon z)^2},\qquad |\varepsilon|=1$$

ノトキニ成立スル。實際 (3) 式カラ

$$f(z)=e^{-t_0}(z-2\varepsilon(1-e^{-t_0})z^2$$
$$+\varepsilon^2(3-8e^{-t_0}+5e^{-2t_0})+z^3+\cdots\cdots)$$

ヲ得ル。

シカシナガラ，Löwner モ注意シテヰルヤウニ (2) ハ Scharf ナ Schranke ヲ與ヘテヰナイ、唯 $t_0\to\infty$ ニ對シ

$$\lim_{t_0\to\infty}\frac{f(z)}{e^{-t_0}}=\lim_{t_0\to\infty}(z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\cdots)$$

$$= z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\cdots$$

トオケバ，(1)，(2)ノ系トシテ

(1′) $|a_2| \leqq 2$ （Bieberbach）

(2′) $|a_3| \leqq 3$ （Löwner）

ガ得ラレ，之等ハ Scharf トナル。

本論ノ目的ハ不等式(2)ヲ Scharf ナモノニスルコトデアル、之ハマダ分ッテキナイ。(*)

§1. 我々ノ目的ノタメニ，先ヅ Valiron-Landau ノ定理(**)ヲ書キ変ヘナケレバナラヌ。

定理1. 實函數 $\lambda(\tau)$ ハ $t_0 \geqq \tau \geqq 0$ デ高々一点ヲ除イテ連続デ

$$|\lambda(\tau)| \leqq e^{-\tau}$$

トスル、又 $0 < N \leqq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ トシ，

$$\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau)\, d\tau \leqq N$$

トスル、コノトキハ

$$\left| \int_0^{t_0} \lambda(\tau)\, d\tau \right| \leqq V(N),$$

コヽニ $V = V(N)$ ヲ，$t_0 e^{-2t_0} \leqq N \leqq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ ナルトキハ

---

*) E. Peschl. Zur Theorie der schlichten Funktionen, Journal für Math. 176 (1936), S. 61–94. Teil II ノ最後参照。

**) Math. Zeitschr. 30, (1929), S. 630

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}=N,\quad t_0\geqq\nu\geqq 0$$

ノ根トシテ，$0<N<t_0e^{-2t_0}$ ナルトキハ $\nu(N)=t_0$ ト定メ

$$\nabla(N)=(\nu+1)e^{-\nu}-e^{-t_0}$$

デアル。

注意 $\nu=\nu(N)$ ハ常ニ唯一ツ定マル、ソレハ ν ノ函数 $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}$ ハ微係数 $-2\nu e^{-2\nu}<0$ ヲ有シ，ν ガ 0 カラ t_0 マデ増加スレバ，函数値ハ $\frac{1}{2}(1-e^{-2t_0})$ カラ $t_0e^{-2t_0}$ マデ変ルカラデアル。

証明. (A) $0<N<t_0e^{-2t_0}$ ナルトキハ $\nabla(N)=t_0e^{-t_0}$ トナルガ，

$$\left|\int_0^{t_0}\lambda(\tau)\,d\tau\right|\leqq\int_0^{t_0}|\lambda(\tau)|\,d\tau\leqq\sqrt{\int_0^{t_0}\lambda^2(\tau)\,d\tau\int_0^{t_0}d\tau}$$

$$\leqq\sqrt{t_0e^{-2t_0}\,t_0}=t_0e^{-t_0}$$

(B) 1 $\mu(\tau)=\begin{cases}e^{-\nu}, & 0\leqq\tau\leqq\nu,\\ e^{-\tau}, & \nu\leqq\tau\leqq t_0\end{cases}$

ト定メルト，

(4) $$\int_0^{t_0}\mu^2(\tau)\,d\tau=\int_0^{\nu}e^{-2\nu}\,d\tau+\int_{\nu}^{t_0}e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}=N\leqq\int_0^{t_0}\lambda^2(\tau)\,d\tau$$

而シテ $t_0\geqq\tau\geqq 0$ ニ於テハ

(5) $$\left(\mu(\tau)-|\lambda(\tau)|\right)\left(2e^{-\nu}-\mu(\tau)-|\lambda(\tau)|\right)\geqq 0$$

デアル、何トナレバ，$0\leqq\tau\leqq\nu$ ナルトキハ左辺ハ $\left(e^{-\nu}-|\lambda(\tau)|\right)^2$ ニシテ，$\nu\leqq\tau\leqq t_0$ ナルトキハ

$$e^{-\nu} \geqq \mu(\tau) = e^{-\tau} \geqq |\lambda(\tau)|$$

ガ成立スルカラデアル。依ツテ (5) ヨリ

$$0 \leqq \int_0^{t_0} \left(\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|\right)\left(2e^{-\nu} - \mu(\tau) - |\lambda(\tau)|\right) d\tau$$

$$= 2e^{-\nu}\left(\int_0^{t_0} \mu(\tau)\,d\tau - \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)|\,d\tau\right) - \int_0^{t_0} \mu^2(\tau)\,d\tau + \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)|^2\,d\tau$$

(4) ガ成立スルカラ，従ツテ

$$\left|\int_0^{t_0} \lambda(\tau)\,d\tau\right| \leqq \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)\,d\tau \leqq \int_0^{t_0} \mu(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^{\nu} e^{-\nu}\,d\tau + \int_{\nu}^{t_0} e^{-\tau}\,d\tau = \nu e^{-\nu} + e^{-\nu} e^{-t_0} = \nabla(N)$$

2. 實際 $\lambda(\tau) = \mu(\tau)$ ナラバ，

$$\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau)\,d\tau = N, \quad \int_0^{t_0} \lambda(\tau)\,d\tau = \nabla(N)$$

デアル。

§2. 定理2. $K(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}$ ヲ $t_0 \geqq \tau \geqq 0$ デ高々一点ヲ除キ連続トシ，$|K(\tau)| = 1$ ニシテ

$$0 < M \leqq \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t_0}\right)$$

トスル。モシ，

$$\left|\int_0^{t_0} K^2(\tau) e^{-2\tau}\,d\tau\right| \leqq M$$

ナラバ

$$\left|\int_0^{t_0} K(\tau) e^{-\tau}\,d\tau\right| \leqq \nabla\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4}e^{-2t_0}\right)$$

(∇，定義ハ§1ノ通リ)

上式ノ等号ノ成立スルヤウナ $K(\tau)$ が存在スル。

証明. I 一般性ヲ失ハズ $\int_0^{t_0} K(\tau)e^{-\tau}d\tau \geqq 0$ トスル。（然ラザルトキハ $K(\tau)$ ノ代リニ $\varepsilon K(\tau)$, $|\varepsilon|=1$ ヲ考フレバヨシ）、スルト假定カラ

$$M \geqq \Re\int_0^{t_0} K^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau = \int_0^{t_0} e^{-2\tau}(2\cos^2\vartheta(\tau)-1)\,d\tau$$

$$= 2\int_0^{t_0} e^{-2\tau}\cos^2\vartheta(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}e^{-2t_0} - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{t_0} e^{-2\tau}\cos^2\vartheta(\tau)\,d\tau \leqq \frac{1}{4}+\frac{M}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t_0} = N$$

$$\leqq \frac{1}{2}(1-e^{-2t_0}),\quad N=(\nu+\tfrac{1}{2})e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}$$

依テ，定理 1 ニ於テ $\lambda(\tau)=e^{-\tau}\cos\vartheta(\tau)$ ト考ヘ，

$$\left|\int_0^{t_0} K(\tau)e^{-\tau}d\tau\right| = \int_0^{t_0} e^{-\tau}\cos\vartheta(\tau)\,d\tau \leqq \nu\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t_0}\right)$$

2. 上ノ定理ニ示シタ不等式ノ等号ノ成立シ得ルコトヲ示シテオク。

$\nu=\nu(N)=\nu\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t_0}\right)$ トシ，次式ヲ満足スル β ヲ選ブ。

$$\int_0^{\beta} e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}\,d\tau - \int_{\beta}^{\nu} e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}\,d\tau = 0,$$

$$0 \leqq \beta \leqq \nu$$

實際，上ノ左辺ハ β ニツイテ連続デ左辺ハ $\beta=0$ ノトキハ $\leqq 0$，$\beta=\nu$ ノトキハ $\geqq 0$ デアルカラ β ハ求マル、ソコデ

$$\vartheta(\tau)=\begin{cases}\arccos e^{\tau-\nu}, & 0\leqq\tau\leqq\beta,\\ -\arccos e^{\tau-\nu}, & \beta<\tau\leqq\nu,\\ 0, & \nu\leqq\tau\leqq t_0\end{cases}$$

$$K(\tau)=e^{i\vartheta(\tau)}$$

ト定ム、スルト $K(\tau)$ ハ $\tau=\beta$ ヲ除キ連続デ $|K(\tau)|=1$ デアッテ

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0}K^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau&=\int_0^{t_0}e^{-2\tau}(2\cos^2\vartheta(\tau)-1)d\tau\\&\quad+2i\int_0^{t_0}e^{-2\tau}\cos\vartheta(\tau)\sin\vartheta(\tau)d\tau\\&=2\int_0^{\nu}e^{-2\tau}\cdot e^{2\tau-2\nu}d\tau+2\int_\nu^{t_0}e^{-2\tau}d\tau+\frac{1}{2}e^{-2t_0}-\frac{1}{2}\\&\quad+2i\left(\int_0^{\nu}e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}d\tau-\int_\beta^{\nu}e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}d\tau\right)\\&=2\nu e^{-2\nu}-e^{-2t_0}+e^{-2\nu}+\frac{1}{2}e^{-2t_0}+\frac{1}{2}=M\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{t_0}K(\tau)e^{-\tau}d\tau\right|&\geqq\Re\int_0^{t_0}K(\tau)e^{-\tau}d\tau=\int_0^{\nu}e^{-\nu}d\tau+\int_\nu^{t_0}e^{-\tau}d\tau\\&=\nu e^{-\nu}-e^{-t_0}+e^{-\nu}=\nabla\left(\frac{M}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t_0}\right)\end{aligned}$$

§3. 扨テ、Löwner ニヨリ、上ノヤウナ $K(\tau)$ ノ何レカヲ取リ帯ニ、

$$b_2=b_2(t_0)=4\left[\int_0^{t_0}K(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-2\int_0^{t_0}K^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

ト表ハセル。

一般性ヲ失ハズ $|b_2(t_0)|=\Re b_2(t_0)$ ト考ヘル。（コレモ $|\varepsilon|$ ヲ適當ニトレバ $K(\tau)$ ノ代リ ニ $\varepsilon K(\tau)$ ヲ考ヘテ可能）

依ツテ

$$\left|b_2(t_0)\right| = \Re\, b_2(t_0) = 4\left\{\left(\int_0^{t_0}\cos\vartheta(\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau\right)^2 - \left(\int_0^{t_0}\sin\vartheta(\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau\right)^2 - \int_0^{t_0}\cos^2\vartheta(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

$$\leqq 4\left\{\left(\int_0^{t_0}\cos\vartheta(\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau\right)^2 - \int_0^{t_0}\cos^2\vartheta(\tau)\cdot e^{-2\tau}d\tau\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

定理1ヲ用ヒ

$$\leqq 4\left\{\left(\nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0}\right)^2 - \left(\nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2}e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0}\right)\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

$$F(\nu;t_0) \equiv 4\left\{\left(\nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0}\right)^2 - \left(\nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2}e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0}\right)\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

トオケバ

(6) $F(0;t_0) = 3 - 8e^{-t_0} + 5e^{-2t_0} \leqq 3$, (等号ハ $t_0=\infty$ ノトキ成立ス)

而シテFヲν＝ツキ微分スレバ

$$\frac{1}{4}F'_\nu(\nu;t_0) = -2\left(\nu e^{-\nu} - e^{-t_0}\right)\nu e^{-\nu}.$$

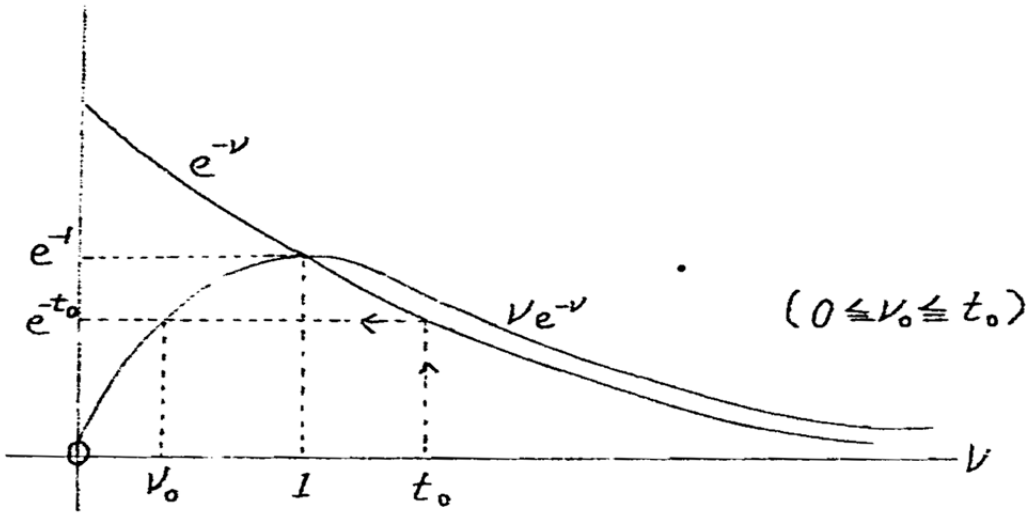
上式ノ根トシテ $\nu=0$ 及ビ $\nu=\nu_0$ ヲ得. 但シ $0 \leqq \nu_0 \leqq t_0$ デ

(7) $\nu_0 e^{-\nu_0} = e^{-t_0}$

デアル。ν_0 ハ t_0 ノ函数デ $t_0\to\infty$ ナルトキハ $\nu_0=\nu_0(t_0)\to 0$ トナル。

而シテ $F(\nu;t_0)$ ハ $\nu=0$ ノトキ Min. トナリ，$\nu=\nu_0$ ノトキ Max. トナル。尚 $\nu=\nu_0(t_0)$ ハ $t_0 \geqq 1$ ノトキ唯一ツ存在シ，次圖ニヨリテ t_0 ト ν_0 トノ関係ガ分ルダロウ。

t_0 ノトキハ ν_0 存在セズ。依ッテ t_0 ノトキハ $\nu_0 = t_0$ トスレバヨイ。



定理3. t_0 = 對シ上ノ如ク $\nu = \nu_0(t_0)$ 決定サレ，

$$\max_{\{f\}} |b_2(t_0)| \leqq 4\left\{\left(\nu_0 e^{-\nu_0} + e^{-\nu_0} - e^{-t_0}\right)^2 - \left(\nu_0 e^{-2\nu_0} + \frac{1}{2}e^{-2\nu_0} - \frac{1}{2}e^{-2t_0}\right)\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

上ノ等号モ成立スル。

注意. 定理3ニ依ッテ，我々ノ結論ハ，多少興味深イコトニハ，$|b_2(t_0)|$ ノ Max. ガ函数 (3) デ Schranke ガ與ヘラレナイコトヲ示ス。コノコトハ唯 $t_0 = \infty$ ノトキノミ實現スル。

實際，今数字的ニ，$t_0 = 1$ ト考フレバ (7) 又ハ上図カラ分カルマクニ，

$$\nu_0(t_0)_{t_0=1} = 1$$

デアル、コノトキニ對シ定理2デ示シタヤウナ $\vartheta(t)$ ヲ定義スレバ，コノ $\vartheta(t)$ ニ應ズル函数ニ對シ，

$$|b_2(t_0)|_{t_0=1} = 1 - e^{-2}$$

一方，函数(3)ニ對シテハ

$$f_2(t_0)_{t_0=1} = 3 - 8e^{-1} + 6e^{-2}.$$

且ツ

(8) $$1 - e^{-2} > 3 - 8e^{-1} + 6e^{-2}$$

デアル、数字的ニ明示スルナラ，(8)カラ

$$6e^{-2} - 8e^{-1} + 2 < 0$$

デアレバヨイノデアルガ，實際

$$6e^{-2} - 8e^{-1} + 2 < 6 \cdot 0,1354 - 8 \cdot 0,3678 + 2 = -0.13$$

トナル。

Löwnerノ結果(2')ハ全ク偶然ノ場合トシテ成立シテヰル。（了）