



Title	高階常微分方程式ノ境界値問題 (二)
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 144, p. 239-246
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74565
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

640. 高階常微分方程式ノ境界値 問題(二)

南雲 道夫 (阪大)

I. 問題

第 n 階常微分方程式

$$(0) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

= 於テ, 與ヘラレタ n 個ノ点 $x = \alpha_i, y = \beta_i (1 \leq i \leq n)$
ヲ通ル積分ノ存在ヲ論ズル方法トシテ, 福原氏ハ *Lagrange*

ノ補間法ヲ利用シテ (0) ヲバ 聯立一階ノ方程式 = 変換シ、
 之レ = 函数空間 = 於ケル不動点ノ存在定理ヲ適用スル方法
 ヲ考ヘラレタ。(岩波講座, 常微分方程式論 131頁)

福原氏ノ考ヘヲ進メテ, 本紙 140号 (雜記 VI) = 於
 テハ, Lagrange ノ補間法ヨリモ一般的名方法 = ヲリ,
 簡明名変換式ガ得ラレタ。次 = ハ更ラニ n 個ノ点ヲ通
 ル代リ =, ヲリ一般的名條件 (n 個ノ線狀條件) = ツ
 イテモ, 前ト同様名方法ヲ具體的名変換ガ得ラレルコ
 トヲ報告シタイ。

$\Lambda_i [y]$ ヲバ $y(x)$ = 對スル n 個ノ linear
 functional トシ

$$\Lambda_i [y(x)] = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ナルマウナ (0) ノ積分ヲ考察シヨウ。例ヘバ特 = Λ_i ヲ
 以

$$\Lambda_i [y(x)] = y(\alpha_i)$$

ナル運算トスレバ前ノ問題トナル。之レハヨリ一般名形式

$$\Lambda_i [y(x)] = \sum_{l=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{i,\nu}^l y^{(\nu-1)}(\alpha_l)$$

= 含マレテキル。次 = ハ一般 =

$$\Lambda_i [y(x)] = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Lambda_{i,\nu} [y^{(\nu)}(x)],$$

$\Lambda_{i,\nu}$ ハ連続名線狀汎函数 [Stieltjes 積分ヲ表ハサ
 レル], ヲ問題トスル。

II. 変換

先づ特殊に第 n 階線形微分方程式

$$(L) \quad L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} P_{n-\nu}(x) \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = 0$$

に於て $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ の問題が (一義的) 完全 = 解 \mathcal{E} である

に、 $\varphi_j(x)$ を (L) の積分

$$\Lambda_i[\varphi_j] = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

とする。例へば

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n}$$

とすれば、 $\varphi_j(x)$ は $n-1$ 次 (高々) の有理整式となり、

$\Lambda_i[\varphi_j] = \delta_{ij} = \text{コツテ係数ヲ決定スルベシ}$ 。更 = 特

に $\Lambda_i[y] = y(\alpha_i)$ となる場合 =

$$\varphi_i(x) = \frac{\prod_{\lambda \neq i} (x - \alpha_\lambda)}{\prod_{\lambda \neq i} (\alpha_i - \alpha_\lambda)}$$

である。(Lagrange) 補間法 = 相當スル)

又 $\chi(x, \alpha)$ を (L) の積分

$$\chi(\alpha, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial^\nu \chi(x, \alpha)}{\partial x^\nu} \Big|_{x=\alpha} = 0 \quad (1 \leq \nu \leq n-2),$$

$$\frac{\partial^{n-1} \chi(x, \alpha)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\alpha} = 1$$

ナルモノトスル。例へバ $L[y] = \frac{d^n y}{dx^n}$ ノ時ニハ

$$\chi(x, \alpha) = \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

扱テ、以上ノ $\varphi_j(x)$ ノ用ヒテ

$$(H) \begin{cases} y = \sum_j \varphi_j(x) y_j \\ y^{(\nu)} = \sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x) y_j \end{cases} \quad (\nu=1, 2, \dots, n-1)$$

ナル変換ニヨリ $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ノバ (y_1, y_2, \dots, y_n) ニ移セバ、方程式 (0) ニ之レト同等ナ聯立一階方程式

$$(K) \quad \frac{dy_i}{dx} = \chi_i(x) \left\{ f(x) - \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(n)}(x) y_j \right\}$$

ニ移ル。但シ $\chi_i(x)$ ニハ

$$\Lambda_i[\chi(x, \alpha)] = \chi_i(\alpha),$$

$$f(x) = f\left(x, \sum_j \varphi_j y_j, \sum_j \varphi_j' y_j, \dots, \sum_j \varphi_j^{(n-1)} y_j\right).$$

(H) ニヨリ (0) カラ (K) ニ移ルコトハ (H) ニヨリ (0) ニハ

$$(J) \begin{cases} \sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x) y_j' = 0 & (\nu=0, 1, 2, \dots, n-2) \\ \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x) y_j' = f(x) - \sum_j \varphi_j^{(n)}(x) y_j \end{cases}$$

ト同等ナルコトヲ証明シ、又 $\chi_j(x)$ ノ定義カラ

$$(I) \begin{cases} \sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x) \chi_j(x) = 0 & (\nu=0, 1, 2, \dots, n-2) \\ \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x) \chi_j(x) = 1 \end{cases}$$

ナル恒等式ヲ導出シ、之ヲ (J) = 適用スレバヨイ。

III 不動点ノ定理ノ適用

(K) ナル式 = ヲリ

$$y_i = c_i + \int_{\alpha_i}^{\infty} \chi_i \left\{ f(x) - \sum_j \varphi_j^{(n)} y_j \right\} dx.$$

ソコデ C_i ヲ決定スルキニ、之レヲ

$$\Lambda_i[y] = \Lambda_i \left[\sum_j \varphi_j y_j \right] = \beta_i$$

= 代入シテ

$$c_i = \beta_i - \Theta_i[y]$$

ヲ得ル (途中デ (I) ヲ利用セヨ)。但シ

$$\Theta_i[y] = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Lambda_{i,\nu} \left[\sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x) \int_{\alpha_j}^{\infty} \chi_j \left\{ f(x) - \sum_l \varphi_l^{(n)} y_l \right\} dx \right]$$

從ツテ $T_i[y]$ ヲ (y_1, \dots, y_n) = 対シテ

$$T_i[y] = \beta_i - \Theta_i[y]$$

$$+ \int_{\alpha_i}^{\infty} \chi_i \left\{ f(x) - \sum_j \varphi_j^{(n)} y_j \right\} dx$$

ナル函数運算トスレバ、之レハ 過連続 (vollstetig)

トナリ、問題ノ函数空間ニ於ケル不動点ノ定理

$$y_i(x) = T_i[y_1, \dots, y_n]$$

= 帰着スル。

茲 = 注意スベキハ、只 L = ツイテ問題が完全 = 解ケテ
 弁レバ、 T_i ナル運算ハ完全 = 具体的 = 與ヘラレルコトデ
 アル。扱テ不動点ノ定理ニヨリ

$$\left\{ \begin{array}{l} |y_i(x) - \beta_i| \leq \omega_i(x) \quad (\omega_i(x) \wedge a \leq x \leq b \text{ デ連続}) \\ (i=1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

ナルヤウナ $a \leq x \leq b$ = 於ケル スベテノ連続函数 $y_i(x)$
 = ツキ帯 =

$$|T_i[y_1, \dots, y_n] - \beta_i| \leq \omega_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ガ成立スルナラバ、微分方程式 (0) ハ

$$\Lambda_i[y] = \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ナル解ヲ有スル。”

以上ハアマリ一般的デ空漠トシテオレカラ次 = 特別ナ場
 合ヲ述ベヨウ。

IV. 特別ナ場合

i) 先ヅ $f(\)$ ノ大サ = ツイテ、之ガ $|y|, |y'|, \dots$
 $\dots, |y^{(n-1)}|$ = ツイテ一次ノ程度デアルトスル。即チ

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq A + \sum_{\nu=0}^{n-1} B_\nu |y^{(\nu)}|$$

又更ニ n 個ノ点ヲ通ル問題 ($x = \alpha_i$ ノトキ $y = \beta_i$) =
 限ル。

$$\text{ソコデ } L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ ヲ用ヒル。}$$

従ツテ

$$\varphi_i(x) = \prod_{\lambda \neq i} \frac{x - \alpha_\lambda}{\alpha_i - \alpha_\lambda}, \quad \chi_i(x) = \frac{(\alpha_i - x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\Theta_i[y] = 0.$$

此ノ場合ニハ $\omega_i(x) = C \frac{|x - \alpha_i|^n}{n!}$ トオクノガ適當

デアラビ、ソコデ

$$\frac{1}{n!} \text{Max}_{a \leq x \leq b} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_j B_\nu \left| \varphi_j^{(\nu)}(x) (x - \alpha_j)^{\nu} \right| \right] = L$$

$$\text{Max}_{a \leq x \leq b} \left[A + \sum_\nu B_\nu \left| \sum_j \beta_j \varphi_j^{(\nu)}(x) \right| \right] = M$$

トオケバ

$$\left| T_i[y_1, \dots, y_n] - \beta_i \right| \leq (M + LC) \frac{|x - \alpha_i|^n}{n!}$$

ヲ得ル。故ニ $\boxed{L < 1}$ ナル時ニハ、 $C = \frac{M}{1-L}$ トスレバ

$$\left| T_i[\] - \beta_i \right| \leq \omega_i(x)$$

トナル、茲ニル解ガ存在スル。

特ニ $n=2$ ノトキハ $\alpha_1 = a, \alpha_2 = b$ トスレバ

$$L = \text{Max} \left[B_1 \frac{b-a}{2}, B_0 \frac{(b-2)^2}{8} + B_1 \frac{b-a}{4} \right] < 1$$

ガ存在ノ充分條件トナル。勿論之レハ尚モツト精密ニスレコトモ出来ル答デアル。 $n \geq 3$ ノ場合ハ一般ニ複雑トナリ、簡單ニ具体的結果ハ求メクイ。之レハ私が計算ノ下手ナタメデアルカラソノ方ノ得意ナ方ノ御援助ヲ仰ガネバナラナ

10.

ii) 今度ハ

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ = - \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu}(x) \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + h(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

⇨ $h(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ が割合 = 小ナル時 = ハ,

$$\mathbb{L}[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu}(x) \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = 0$$

= 於ケル 解 $\varphi_j(x)$ ヲ 利用スルコト = ヨリ, 簡單 = ナル。即

チ

$$\frac{d^n}{dx^n} \varphi_j(x) = - \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \varphi_j(x)$$

= ヨリ, (K) ナル 方程式ハ

$$\frac{dy_i}{dx} = \lambda_i(x) h\left(x, \sum_j \varphi_j y_j, \dots, \sum_j \varphi_j^{(n-1)} y_j\right)$$

トナル。故 = \mathbb{T}_i ハ

$$\mathbb{T}_i[y] = \beta_i - \mathbb{H}_i[y] + \int_{\alpha_i}^x \lambda_i h(\) dx,$$

但シ

$$\mathbb{H}_i[y] = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{i,\nu} \left[\sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x) \int_{\alpha_j}^x \lambda_j h(\) dx \right].$$

ソコデ $h(\)$ が割合 = 小ナルコトヲ 利用スレバ, $(\omega_i(x))$ ヲ 適當 = 定メテ) 存在定理が成立スルコトが言ヘル。