



Title	境界點がregularナルタメノー條件
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 144, p. 247-254
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74566
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

641. 境界点が *regular* ナルタメノ 一条件

井 上 正 雄 (阪大)

境界点が *regular* (Dirichlet / 問題 = 関シテ)
ナルタメノ一充分条件ヲ與ヘルノが目的デアル (平面 / 場合).
ソノタメ先ツ次ノ豫備定理ヲ証明シテオカシ。

豫備定理: $|z| < R$ ナル円 = 線分 $l_r: 0 \leq \varpi \leq r < R$ ナル
cut ヲ入レタ領域ヲ D_r デ表ハシ, l_r 上デ $0, |z| = R$
上デ $\infty > \alpha > 0$ ナル値ヲトル D_r デノ調和函数ヲ
 $\omega(\varpi; D_r)$ トスル。

$\varphi(r)$ ヲ $0 \leq r \leq 1$ デ定義サレタ $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} < \infty$ ナル
条件ヲ満足スル正ノ實数值函数トスル。

シカルトキ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega(-\varphi(r); D_r) = 0$$

証明: $|z| < \frac{R}{r}$ ナル円 = 線分 $l_r: 0 \leq \varpi \leq 1$ ナル cut ヲ
入レタ領域ヲ D^r デ表ハシ, l_r 上デ $0, |z| = \frac{R}{r}$ 上
デ α ナル値ヲトル調和函数ヲ $\omega(\varpi; D^r)$ トスレバ

$$\omega\left(\frac{\varpi}{r}; D^r\right) = \omega(\varpi; D_r)$$

更ニ全平面カラ線分 l_r ヲ除イタ單一連結領域ヲ $\infty \rightarrow 0$
ナル如ク ξ - 平面上ノ単位円 $|\xi| < 1$ = 等円 = 寫像スル函
數ヲ $\xi = f(\varpi)$ トシ, コノ函数ニヨツテ $|z| = \frac{R}{r}$ ノ移ル
曲線ヲ C_r トスル。 $|\xi| = 1$, C_r デ囲レタ領域ヲ $\mathcal{D}_r$ ト
シ, $|\xi| = 1$ デ $0, C_r$ 上デ α ナル値ヲトル $\mathcal{D}_r$ デノ調和函

数 $\omega(\xi; D_r)$ トスレバ

$$\omega(\xi; D_r) = \omega\left(\frac{\xi}{r}; D^r\right) = \omega\left(f\left(\frac{\xi}{r}\right); D_r\right)$$

從ツテ

$$\omega(-g(r); D_r) = \omega\left(-\frac{g(r)}{r}; D^r\right) = \omega\left(f\left(-\frac{g(r)}{r}\right); D_r\right)$$

C_r ノ直径ヲ $2d_r$ トスルトキ, $C_r \rightarrow \{0\}$ 且ツ假定ヨリ

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{g(r)}{r} < \infty \quad \text{ナル故充分小ナルスベテノ } r = \text{對シ}$$

$$\left| f\left(-\frac{g(r)}{r}\right) \right| > d_r,$$

$$\text{且ツ} \quad \omega\left(f\left(-\frac{g(r)}{r}\right); D_r\right) \leq \alpha \frac{\log \frac{g(r)}{r}}{\log d_r}$$

シカルニ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha \frac{\log \frac{g(r)}{r}}{\log d_r} = 0$$

ナル故

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \omega(-g(r); D_r) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \omega\left(f\left(-\frac{g(r)}{r}\right); D_r\right) \leq 0$$

シカルニ常ニ $\omega(-g(r); D_r) \geq 0$ ナル故

$$\text{結局} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \omega(-g(r); D_r) = 0 \quad (\text{証明了})$$

サテ次ノ定理ヲ証明シマシ。

定理: D ノ境界点 p = 對シ次ノ如キ D ノ境界点列 $\{p_n\}$

が撰マルヲバ p ハ regular デアル:

$$1^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

$$2^\circ \quad g(E_D, p_n) > 0 \quad (1) \quad (\text{註. 次條へ})$$

$$3^\circ. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p - p_n|}{\rho(E_D, p_n)} < \infty$$

コゝ = $\rho(E_D, p_n)$ ハ E_D, p_n ノ原点ヲ端点トスル線分ノ長サヲ表ハスモノトス。

証明: D ノ境界 F 上ニ任意ニ連続函数 (實) $f(x)$ ヲ與ヘル。 $f(x)$ = 關スル D ノ Dirichlet ノ問題ニ對スル generalised solution ヲ $U(x)$ トスルトキ

$$\lim_{x \rightarrow p} U(x) = f(p)$$

ナルコトヲ証明スレバヨイ。

任意ニ $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘタトキ

$|p - x| < \delta$ ナラバ, $x \in F$ = 對シテ $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ ナル如キ $\delta (> 0)$ ガ定ル。シカラバ勿論 $|p - x| < \delta, |p - p'| < \frac{\delta}{2}$ ナラバ

$$|f(p') - f(p)| < 2\varepsilon, \quad \text{但シ } p' \in F$$

次ニ

$$\text{O.G.} \quad |p - p'| < \frac{\delta}{2}, |p - x| \geq \delta, x \in F \quad \left| \frac{f(p') - f(x)}{p' - x} \right| = M$$

ナル有限値 $M (> 0)$ ヲ定メルコトが出來ル。

シカルトキ $x \in F, |p - p'| < \frac{\delta}{2}$ = 對シテハ

$$f(p') - M|p' - x| - 2\varepsilon < f(x) < f(p') + M|p' - x| + 2\varepsilon$$

充分大ナル n = 對シ p_n ハ $|p - p_n| < \frac{\delta}{2}$ トナルカラ, オ

1) コノ條件カラ Beurling ノ定理 (本誌 93 号 419) = ヨツテ p_n ガ regular ナ境界点ナルコトが判ル。

カル p_n を p' と考へれば

$$f(p_n) - M|p_n - z| - 2\varepsilon < f(z) < f(p_n) + M|p_n - z| + 2\varepsilon$$

次 = D の境界点 $z = \tau$ に対して $|\tau - p_n|$ なる値を與へ
 タトキ、 D = 關スル *Dirichlet* の問題、*generalised solution* を $V_n(z)$ とスレバ、 $f(p_n) + MV_n(z) + 2\varepsilon$
 は D 内では有限調和函数であり且つ D の *regular* な境界点
 = 於て

$$|p_n - z| = V_n(z)$$

ディアルカラ談話 636 = 於いてナシタ第一の注意 = ヨリ

$$f(p_n) - MV_n(z) - 2\varepsilon < U(z) < f(p_n) + MV_n(z) + 2\varepsilon, \\ z \in D$$

D の *projection* を作ルベキ ε -平面上 = 充分大ナル円 $E(|\xi| \leq R)$ を画キ、 E_{D, p_n} がコノ円内に入ルヲ入ル = スル。

コノ円 $E = E_{D, p_n}$ のうち原点 = 達スル線分 (假定 2° = ヨリ存在スル) = 沿ッテ *cut* を入レタ領域を Δ_n とシ、
 コノ境界点 z に対して $|\xi|$ なる値をトル Δ_n 内、調和函数を $v_n(\xi)$ とスレバ談話 636 = 於て証明シタ通り

$$V_n(z) \leq v_n(-|p_n - z|)$$

トナル。

依ッテ

$$f(p_n) - Mv_n(-|p_n - z|) - 2\varepsilon < U(z) \\ < f(p_n) + Mv_n(-|p_n - z|) + 2\varepsilon.$$

サテ

$$1^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(E_D, p_n) = \eta > 0 \text{ ノ トキノ 証明 } ^{2)}$$

コノ トキハ $E = \text{cut}$: $0 \leq \xi \leq \eta - \mu$, $\mu = \mu$ ハ充分小ナル正数, η 入レタ領域ヲ Δ トシ, コノ 境界点 $\xi = \eta$ $|\xi|$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $v(\xi)$ トスレバ充分先ノスベテノ n ニ對シ

$$v_n(\xi) \leq v(\xi)$$

故ニ

$$f(p_n) - M v(-|p_n - z|) - 2\varepsilon < U(z)$$

$$< f(p_n) + M v(-|p_n - z|) + 2\varepsilon$$

$$\therefore f(p) - M v(-|p - z|) - 2\varepsilon \leq U(z)$$

$$\leq f(p) + M v(-|p - z|) + 2\varepsilon.$$

$$\text{シカレ} = \lim_{z \rightarrow p} v(-|p - z|) = 0 \text{ ナル故}$$

$$f(p) - 2\varepsilon \leq \lim_{z \rightarrow p} U(z) \leq \overline{\lim_{z \rightarrow p} U(z)} \leq f(p) + 2\varepsilon.$$

$$\varepsilon \text{ ハ 任意デアツタカラ 結局 } \lim_{z \rightarrow p} U(z) = f(p)$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(E_D, p_n) = 0 \text{ ノ トキノ 証明.}$$

$$\text{適當} = D \text{ ノ 内点ノ系列 } \{z_n\} \text{ ヲ 撰ビ } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p \text{ 且}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(z_n) = \overline{\lim_{z \rightarrow p} U(z)}$$

ナラシメルコトが出来ル。

$$\Delta_n \text{ ノ } |\xi| = R \text{ ナル境界点ヲ } R, \text{ cut: } 0 \leq \xi \leq \rho(E_D, p_n)$$

2) 談話 603 デハ シタノト何等 変リハナイ。

上デ0ナル値ヲトル Δ_n 内 ノ 調和函数ヲ $\omega_n(\varepsilon)$ トスレバ

$$\omega_n(\varepsilon) + \rho(E_D, p_n) \geq v_n(\varepsilon) > 0$$

シカル = 假定 = ヨリ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_n - p|}{\rho(E_D, p_n)} < \infty$ デアレカラ, 豫備

定理 = ヨリ, 充分大ナルスベテノ n = 對シ

$$\omega_n(-|p_n - p|) < \frac{\varepsilon}{M}$$

ナラシメ得ル。

n ヲ充分大キフトリ更 = $|f(p_n) - f(p)| < \varepsilon$ 且ツ

$\rho(E_D, p_n) < \frac{\varepsilon}{M}$ ナル如キ一ツノ p_n ヲ固定スル。コノ p_n
= 對シ $|\lambda| < \varepsilon$ (λ ハ複素数) ナラバ

$$\omega_n(-|p_n - p| + \lambda) < \frac{\varepsilon}{M}$$

ナル如キ正数 ε が存在スル。

シカルトキ p ヲ中心トシテ ε ノ半径トスル円ヲ画ケバ,
充分大ノスベテノ z_i ハコノ円内ニ入ル。カ、ルスベテノ z_i
= 對シテハ

$$\begin{aligned} f(p_n) - M\{\omega_n(-|p_n - z_i|) + \rho(E_D, p_n)\} - 2\varepsilon &< U(z_i) \\ &< f(p_n) + M\{\omega_n(-|p_n - z_i|) + \rho(E_D, p_n)\} + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

即チ

$$f(p) - 5\varepsilon < U(z_i) < f(p) + 5\varepsilon.$$

故ニ

$$f(p) - 5\varepsilon \leq \overline{\lim_{z \rightarrow p}} U(z) \leq f(p) + 5\varepsilon.$$

ε 、任意デアツタカラ、結局

$$\overline{\lim_{x \rightarrow p}} U(x) = f(p).$$

全ク同様ニシテ

$$\underline{\lim_{x \rightarrow p}} U(x) = f(p).$$

依ツテ

$$\lim_{x \rightarrow p} U(x) = f(p).$$

即チ p 、*regular* ナ境界点デアル。(証明了)

境界点ガ *regular* ナルタメノ 必要條件トシテ

Wiener, *Bouligand* 等ノ 條件ガアルガ、コノ 談話デ
ハ直観的ニワカリ 易イ幾何學的ナ性質カラ境界点ノ *regu-*
*larity*ヲ導キ出サントシタモノデアル。カナル 條件トシ
テ *Raynor*³⁾ 及ビ *Burling*⁴⁾ノ 條件ガアル。

*Raynor*ノハ判定スベキ境界点 p ノ 近傍ニケル 状態ニヨルモノデアルガ再ヲ考ヘル点ガ少シクアキ足ラナイ。
*Burling*ノハ p ニ於イテ作ル D ノ *projection*ニ
ヨルモノデアル。コノ 談話ヲ與ヘタ一條件ハコノ 中間ヲ行ク
ソノ点ノ 近傍ニケル境界点ニテ作ツタ *projection*ニ
ヨルモノデアリ 談話 419, 609ニ於イテ作ツタ例ハコノ 條
件ニ皆當嵌ルノデアル。

猶コノ 條件ガ必要デナイコトハ例ヘバ *Cantor*ノ点集合

3) 本誌 137号 609, 142号 629.

4) 本誌 93号 419.

ヲ境界ニモツモノヲ考ヘテ見レバヨイ。