



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, X IV
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 145, p. 265-269
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74569
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

644. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, XIV

福原 満洲 雄 (九大)

1. XII, XIII デ述べた結果ノ中デ関係ノアル部分ダケヲ繰返シテ述ベテ置ク。

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = y f(t, y)$$

ノ右辺 $f(t, y)$ ハ漸近的ニ

$$(2) \quad f(t, y) \sim \sum_{j,k} a_{j,k} e^{jt} y^k$$

$$(a_{0,0} = \dots = a_{0,n-1} = 0, a_{0,n} \neq 0)$$

ナル形ニ展開サレルモノトスル。(1) ノ形式的ノ解トシテ

$$(3) \quad y \sim \sum_{j,k} p_{j,k} e^{jt} z^k$$

$$(4) \quad z = \left(\frac{a'}{a} \alpha \left(-\frac{na^2}{a'} (t+c) \right) \right)^{-\frac{1}{n}}$$

ヲ得ル、茲ニ $\alpha = \alpha(\tau)$ ハ $w(0) = 0$ ヲ満足スル

$$\frac{dw}{d\tau} = 1 + w^{-1}$$

ノ解ヲアツテ τ^{-1} 、 $\tau^{-1} \log \tau$ が十分ニ小サイ時

$$(5) \quad \alpha(\tau) = \tau (1 + \tau^{-1} \log \tau + \dots)$$

ナル形ニ τ^{-1} 、 $\tau^{-1} \log \tau$ ノ収斂ナ累級数ニ展開サレル。

$$y = \sum_{N-1} p_{j,k} e^{jt} z^k + u$$

ト置イテ得ラレル u = 関スル方程式

$$(6) \quad \frac{du}{dt} = g(t, z, u)$$

が $u = O(t^{-\frac{M'}{u}})$ (M' = 關シテ前面参照) ヲ満足スル解ヲ唯一ツ持ツコトヲ証明シ、ソレニ對應スル (1) ノ解ヲ $y = \varphi(t, C)$ ト表ハス。(前回ハ $y = \psi(t, C)$ ト書イテが大シタ問題デハナイ)。又ハ (4) = 依ツテ定義サレル変数トシ、 $\psi(t, C) = \varphi(t, z) =$ 依ツテ t, z ノ函数 $\varphi(t, z)$ ヲ定義スル。結論ハ屢々言フマウ = $y = \varphi(t, z)$ ヲ t, z ノ函数ト考ヘタトキ漸近的 = (3) ナレ形ニ展開サレルコトデアル。

2. 前回 = 於テハ $\psi(t, C)$ が N = 關係シナイ理由ヲ説明シナカツタ。ソレヲ示ス = ハ解ノ單獨條件ニ注意スレバヨイノデアル。 $u = O(t^{-\frac{m}{n}})$ ヲ満足スル (6) ノ解が唯一ツデアルマウ = N = 關係シナイ m ヲ取ルコトが出来ルコトニ注意スル、 $\psi(t, C)$ ハ N = 關係スルカモ知レナイカラ $\psi_N(t, C)$ ト書クコト = スル。

$N' > N$ トスレバ

$$u = \psi_{N'}(t, C) - \sum_{j=k}^{N'-1} p_{jk} e^{j't} z^k$$

ハ (6) ノ解デ $u = O(t^{-\frac{m}{n}})$ ヲ満足スルデアラウ、ソノマウナ (6) ノ解ハ唯一ツデアルカラソレニ對應スル (1) ノ解ハ $\varphi_N(t, C)$ デナケレバナラナイ。此ノマウ = シテ $\psi_N(t, C)$ が N = 關係シナイコトが分ル、從ツテ $\varphi(t, z)$ モ N = 關係シナイノデアル。

3. 扱 $t_0, z_0 =$ 於テ

$$(7) \quad \left| \varphi(t, z) - \sum_{j=1}^N p_{j,t_0} e^{j t z_{j,t_0}} \right| \leq K(|e^{M t}| + |z|^{M'})$$

が成立スルコトノ証明デアル。(4)ニ依ツテ $t_0, z_0 =$ 對應スル C ノ値ヲ C_0 トスル。(6)ノ右辺が含ム $C = C_0$ ナル値ヲ與ヘ、コノ方程式が t_0 ヲ含ミ ∞ マデ伸びテ居ル曲線 Γ ノ上デ

$$|u| \leq K(|e^{M t}| + |z|^{M'})$$

ヲ満足スル (各カ含ム $C =$ ハ C_0 ナル値ヲ與ヘル) 解ヲ持ツコトヲ存在定理ヲ使ツテ証明スルノデアル、ソノヤウナ解ハ $u = O(t^{-\frac{M'}{n}})$ ヲ満足スルカラ解ノ單獨性ニヨリ、ソレガ

$$u = \varphi(t, z) - \sum_{j=1}^N p_{j,t_0} e^{j t z_{j,t_0}}$$

$=$ 於テ $C = C_0$ ト置イタモノニナル。依ツテ $t_0, z_0 =$ 於イテ (7)ヲ得ル。

此ノヤウニ結論シ得ルタメニハ t_0, z_0 ガドノヤウナ範圍ニアレバヨイカラ調ベルコトニ依ツテ漸近展開ノ問題ハ解決スル。

4. $\varphi(t, z)$ ノ $z =$ 関スル微分可能性、正則性が如何ニシテ証明サレルカトイフコトハ既ニ前面ニ於イテ述べタ、ウルサイコトハ言ハズニ級数 (2)ハ收斂デソノ和ガ $f(t, z)$ デアルトシヨウ。此ノ場合ニハ $\varphi(t, z)$ ガ e^t ノ收斂ナ冪級数ニ展開サレルコトノ理由ヲ説明シヨウ、級数 (2)ガ收斂

$f(z, y)$ デアルトイフコトハ $f(z, y)$ が $z =$
 $2\pi i$ ノ週期トスルコトイフコト = 他ナラナイ (尤モ $y =$
 0 = 於ケル正則性ヲ假定シテノ話、 $f(z, y)$
 $e^z = \infty$ ノ函数ト考ヘタトキ $\infty = 0$ ノ近傍デ一様有界、
 従ツテ $\infty = 0$ ガ除去可能ノ特異点トナルカラデアル、) 又
 $g(z, w)$ が e^z ノ收斂ノ冪級数ニ展開サレルトイフコトハ
 $g(z, w)$ が $z = 2\pi i$ ノ週期トスルコトイフコト = 他
 ナラナイ。 w ハ z ノ $z + 2\pi i$ デ、 C ノ $C - 2\pi i$ ガ置換ヘテ
 モ変ラナイカラ

$$g(z + 2\pi i, w) = \varpi(z + 2\pi i, C - 2\pi i)$$

デアル、 $f(z, y)$ ノ週期性 = ヨリ (6) ノ右辺 $g(z, w, u)$ モ $z =$
 $2\pi i$ ノ週期トスル。

依ツテ

$$u = \varpi(z + 2\pi i, C - 2\pi i) - P_N(z, w)$$

ハ $u = O(z^{-\frac{M'}{N}})$ ノ満足スル (6) ノ解デアル、ソノ ∞ ナ解ハ
 唯一ツデアルカラ

$$\varpi(z + 2\pi i, C - 2\pi i) = \varpi(z, C)$$

トナラナケレバナラナイ、コレ = 依ツテ $g(z, w)$ が $z = 2\pi i$
 $2\pi i$ ノ週期トスルコトガ分ル、コレカラ $\varpi(z, C)$ ノ
 $\infty = e^z$ ノ函数ト考ヘタトキ $\infty = 0$ が通常超越点デアルコ
 トモ分ル。

コノ ∞ = 漸近展開ノ問題ガ解決スルト級数ノ收斂問題
 モ片附イテ行ク。

$g(z, w)$ ノ w ノ冪級数ニ展開シテモ一般ニ收斂シナイ

ソレハ何故カ、説明スルコトモ出来ルカ否定的ノ結果デアル
カラ省略シテ置ク。

5. 以上3面ニ亘ッテ微分方程式(1)ノ解ノ漸近展開ノ
問題ヲ扱フ方針ヲ述ベタ、併シコノ方針ハコノ場合ノミニ有
效ナノデハナイ。ソノ適用範囲ノ廣イコト、証明ニ殆ンド技
巧ヲ要シナイコト、而モ同ジ結論ニ達スルノニ逐次近似法
ナドヨリ計算ガ楽ナコトナドガ私ガ特ニ強調シタイ点ナノデ
アル。

方程式ノ形ガ異ヘラレタラ、先ヅ形式的ノ解ヲ求メル、
次ニソレヲ漸近展開トスル解ノ存在ト單独性ヲ確メルタメ形
式的ニ得タ級数ヲ途中デ切ツテ δ トノ差ヲ作り、ソノ差ニ関
スル方程式ニ解ノ存在定理及ビ單独條件ニ関スル定理ヲ應用
スル、勝手ナ常数 C ガ入ッテ居ル場合ニハ補助函数ヲ含ム微
分方程式ニ関スル定理ヲ使ッテ C ニ関スル性質ヲ調べル、ソ
レデ漸近展開ノ問題ハ片ガ附ク、更ニ原点ガ除去可能ノ特異
点デアルカ否カラ調べルコトニ依ッテ級数ノ收斂性ガ分ル、
何ノ躊躇モナク証明ガ進メラレ確實ニ結果ヲ掴ソデ行ケル、
コノ方法ガ今マデ何故使ハレナカツタカト不思議ニ思ハレ
ル位デアル。カウナルト残ツタ場合ヲ風潰シニ片附ケルコト
ナドハ單ナル根氣仕事ニ過ギナクナツテ了フ。