



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 位相幾何學ノ形式化（Ⅰ）                                                                |
| Author(s)    | 寺阪, 英孝                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1937, 146, p. 281-286                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74573">https://doi.org/10.18910/74573</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 648. 位相幾何學ノ形式化(I)

寺 阪 英 孝 (阪大)

*Kuratowski* ノ名著 *Topologie* = ヨツテ集合論的位相幾何學ノ *Formalisierung* が廣ク紹介サレタガ、集合全体ノ性質又ハ集合間ノ關係ダケが問題ヲ個々ノ点ニ於ケル局所的狀態ニ考ヘズニスマセタイトキハ殊ニ形式的計算法が望マシイ。

然レ *Kuratowski* ノ記号ハ余リ取扱ヒ易クナイ。例ヘバ開集合ダケデ適當ニ和ト積トヲ定義シテソレが環ヲツクルヨリニセヨト云フ問題ヲ考ヘテ見ルト、ソレニハ所謂正則集合(即チ開集合ノ内部ニナツテキルヤウナ集合)ダケニ局限シテ、 $A, B$  ノ和  $A \oplus B$  トシテハ  $A+B-AB$  ノ開苞ノ内部、即チ

$$A \oplus B = I(\overline{A+B-AB})$$

ヲトリ、積トシテハ  $AB$  ヲトルコトニスレバヨイノデアルガ、コレガ環ヲ造ルコトヲ云フタメニ先ヅ結合律が満足サレテキルコトヲ証明シナケレバナラヌ。所ガコレハ

$$(A \oplus B) \oplus C = I(\overline{I(\overline{A+B-AB})+C-I(\overline{A+B-AB})C})$$

$$A \oplus (B \oplus C) = I(\overline{I(\overline{B+C-BC})+A-I(\overline{B+C-BC})A})$$

ノ等シイコトヲ証明スルコトニナルノダカラ、ウソザリシテ了フ。コレヲモ少シ解リヨク取扱フタメニ先ヅ集合計算ヲ更ニ形式化シ、色々公式等ヲ出シテ最後ニ上式ノ等シイコトヲ証明シヨウト思フ。コノデアル方法ハ何ニ新ラシイモノデナ

ヲ探セ、処々ニ散見スル(例ヘバ Stone, Birkhoff, Ore)シ、結果ニ Kuratowski ノ本ニ大概アルケレドモ、何カノオ役ニ立テバト思ッテ冗漫ヲ省リミズ本紙ヲ惜リルコトニシタ。ユレハ阪大デノ特別講義ノ一部デア  
ル。

§1.  $A, B, X$  等ハ抽象的ニ喚ヘフレタ集合(單ナル文字トモ云ヘル)デアツテ、 $A, B$ ニ對シ  $A+B$  (和) 及ビ  $AB$  (積) が一意ニ對應シ、尚  $A^c$  ( $A$ ノ補集合ニ相當スル) 及ビ  $A^a$  ( $A$ ノ開苞、即チ通常  $\bar{A}$  ト書クモノ) が矢張り  $A$ ニ對シ一意ニ定義サレテキテ、此レ等ガ次ノ諸關係ヲ滿タスモノトスル。

加 法  $S_1$   $A+B=B+A$

$$S_2 \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$S_3 \quad A+O=A \quad (O \text{ナル集合, 空集合})$$

乗 法  $P_1$   $AB=BA$

$$P_2 \quad (AB)C=A(BC)$$

$$P_3 \quad AO=O$$

分配律  $D$   $A(B+C)=AB+AC$

餘 法  $C_1$   $A^{cc}=A$

$$C_2 \quad AA^c=O$$

$$C_3 \quad (A+B)^c=A^cB^c, \quad (AB)^c=A^c+B^c$$

$$C_4 \quad AB^c=O \quad \& \quad BA^c=O \rightarrow A=B$$

$$(\text{又ハ } A \subset B \quad \& \quad B \subset A \rightarrow A=B)$$

( $AB^c = 0$  ノコトヲ  $A \subset B$  ト書クノデアル。Cノ定義也!)

閉法  $A, A^{aa} = A^a$

$A_2 \quad (A+B)^a = A^a + B^a$

$A_3 \quad AA^{ac} = 0$  (即チ  $A \subset A^a$ )

(定義  $A = A^a$  ナル如キ集合  $A$  ヲ閉集合ト云フ)

(備考) 1)  $C_3$  ハ兩式中イザレカ一方ヲ假定スレバヨイ。

2)  $A \subset B$  ノ記号ハ用ヒズ  $AB^c = 0$  デ押トホセル  
ガCヲ用ヒタ方がワカリ易イ。實際ハ兩者混  
用スル。

3)  $AB^c$  ハ通常  $A-B$  ト書カレル。然シ  $A-B+B$   
ハ  $A$  デハナイノデアルカラ取扱ヒ難イ。

$$A-B+B = AB^c + B = A+B \quad (\S 2, (6) \text{ 参照}),$$

$$\begin{aligned} A+B-B &= (A+B)B^c = AB^c + BB^c = AB^c \\ &= A-B \text{ ヲ比較シテ見ルト不便サガワカ} \\ &\text{ル。} \end{aligned}$$

§2. 先ヅ準備トシテ簡單十式ヲ導イテ見ヨシ。

(1)  $AB \subset A \subset A+B$

(証) 左式ハCノ定義ニヨツテ  $AB \cdot A^c = 0$  ノコトデ,  
コレガ正シイコトハ

$$\bullet AB \cdot A^c = AA^c \cdot B \underset{C_2}{=} 0 \cdot B = 0$$

同様ニ

$$A(A+B)^c \underset{C_3}{=} A \cdot A^c B^c = AA^c \cdot B^c = 0 \rightarrow A \subset A+B$$

(2)  $A+AB=A, \quad A(A+B)=A$

$$(証) (1) \rightarrow A + AB \supset A.$$

$$又 \cdot (A + AB)A^c = AA^c + ABA^c = 0$$

$$\rightarrow A + ABCA. \quad 故 = A + AB = A.$$

右式も同様に出ル。

$$(3) \quad A + A = A, \quad AA = A$$

(証明略)

$$(4) \quad A(B + B^c) = A$$

$$(証) (1) \rightarrow A(B + B^c) \subset A$$

$$\begin{aligned} 次 = \quad A(A(B + B^c))^c & \stackrel{C_3}{=} A(A^c + (B + B^c)^c) \\ & = AA^c + AB^cB = 0 \\ & \rightarrow A \subset A(B + B^c) \end{aligned}$$

由ッテ  $C_4$  = ヨリ両者ハ等ノイ。

(備考) 一般 =  $A + A^c$  ハ  $0^c$  デ、空間全体 = 當ル。

通常 1, 2 等デ表ハスガ、實際使フトキハ (4) ノ形ダケデア  
ルカラ、ソノナ文字ヲ用キル = 及バナイ。使ヒガハ例ヘバ次  
ノ等値式ノ証明デワカル。(  $\sim$  ハ同意義  $\iff$  ノコト )

$$(5) \quad (A \subset B) \sim (AB^c = 0) \sim (AB = A) \sim (A + B = B)$$

$$(証) i) \quad AB^c = 0 \rightarrow A = A(B + B^c) = AB + AB^c = AB + 0 = AB.$$

$$AB = A \rightarrow A \cdot B^c = AB \cdot B^c = A \cdot BB^c = 0$$

$$\therefore AB^c = 0 \sim AB = A$$

$$ii) \quad AB^c = 0 \rightarrow A + B \stackrel{(4)}{=} A(B + B^c) + B = (AB + AB^c) + B$$

$$= AB + B \stackrel{(2)}{=} B$$

$$A + B = B \rightarrow AB^c = A(A + B)^c = A \cdot A^c B^c = 0$$

$$\therefore AB^c = 0 \sim A + B = B$$

次=便利ナ式トシテ

$$(6) AB^c + B = A + B$$

$$\begin{aligned} \text{(証)} \quad AB^c + B &\stackrel{(2)}{=} AB^c + (AB + B) = (AB^c + AB) + B \\ &= A(B^c + B) + B \stackrel{(4)}{=} A + B \end{aligned}$$

(5)ノ等値式ヲ使フト次式が出ル。

$$(7) A < B \rightarrow A^a < B^a$$

$$\text{(証)} \quad A < B \rightarrow A + B = B \xrightarrow{A_2} A^a + B^a = B^a \rightarrow A^a < B^a.$$

餘法デハ (6) ト逆 =

$$(8) A < B \rightarrow A^c \supset B^c$$

$$\text{(証)} \quad A < B \sim AB^c = 0 \xrightarrow{C_1} A^{cc} B^c = 0 \sim A^c \supset B^c.$$

是レ等カラ直チ =

$$(9) A < B \rightarrow A^{cac} < B^{cac}$$

が出ル。  $A^{cac}$  トハ  $A$  ノ内部ノコトデアリ。  $I(A)$  トカ  $A^i$

トカ書ク。  $cac$  = ツイテハ更ニ次式が成立ツ。

$$(10) (AB)^{cac} = A^{cac} \cdot B^{cac} \quad (\text{積ノ内部} = \text{内部ノ積})$$

(定義)  $A = A^{cac}$  +ル  $A$  7 閉集合 トイフ。

$$(11) U = U^{cac} \quad (\text{即チ } U \text{ ハ閉集合}) \rightarrow (AU)^a \supset A^a U.$$

ヨク使フ式デアリ。

$$\text{(証)} \quad (AU)^a \cdot A^a U = 0 \quad \text{ヲ証スル、ミヨイ訴デアリ。}$$

$U = U^{cac}$  7 入レルト

$$\begin{aligned} (AU)^a A^a \cdot U^{cac} &= (AU)^a U^{cac} \cdot A^a \\ &\stackrel{C_3, A_2}{=} (AU + U^c)^a A^a \stackrel{(6)}{=} (A + U^c)^a A^a \\ &= A^a U^{cac} \cdot A^a = A^a A^a \cdot U^{cac} \stackrel{C_2}{=} 0 \end{aligned}$$

$$(12) \quad U = U^{cacc} (U \text{ へ開}) \rightarrow (AU)^a = (A^a U)^a$$

$$(証) \quad AU \subset A^a U \text{ より } (AU)^a \subset (A^a U)^a. \text{ コレト(11)}$$

トカラ出ル。

次 =  $A^{accac}$  たる operation を考へヨ。