OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Pseudo regular function ニ関スルニ三ノ注意
Author(s)	髙木, 尚文
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 146, p. 298-307
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74575
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

650. Pseudo regular function ニ関スル二三ノ注意

高木尚文（東北大）

1. 角谷氏ノ Jap. Journ. of Math., vol. XIII, PP. 376－392 ニ於テ定義セラレタ Pseudo regular function ニツイテ，Picard ノ定理ノ拡張デアル Lindelöf ノ定理及ビ Maximum Principle ノ定理ヲ同様ナ條件ノ下ニ成立スルコトヲ述ベル。

ソノ証明ニハ gross ノ theorem ノ証明法ヲ用ヒル。

$z=x+iy$ ノ一意連続函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ガ次ノ二條件ヲ満足スルトキD内デ Pseudo regular function[1] デアルトイフ。

---

1) 簡単ノタメ＝Pseudo regular ヲ P. P. トカク。
又 Pseudo meromorphic ヲ P. m. トカクコトニスル。

1° u_x, u_y, v_x, v_y が存在シテ、D ニ於イテ連続デアル。

2° D 内ニ集積点ヲ有シナイ可附番集合ヲ除イテハ

$$J(x,y)\equiv\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}>0$$

3° $J(x,y)=0$ ナル点 z_0 ニ於テハ z_0 ノ充分小ナル近傍ガ唯 $w_0=f(z_0)$ ニ於テ $(n-1)$ 次ノ代数分岐点ヲ有スル Riemann surface ヘ topologically = map セラレル。

コレラノ條件ノ中 3° ハ 1°, 2° ヨリ導キ出セルコトハ S. Stoïlow ノ Annales de l'Institute Poincaré 2 (1932) 及ビ C. R. 200 (1935) ニ出テヲル論文ニヨッテ解ルシ、直接証明スルコトモ出来ル。故ニ條件トシテハ 1°, 2° ガアレバ充分デス。

角谷氏ノ前述ノ論文ガ定義セラレタ記号ヲソノマヽ用ヒルコトニシマス。

即チ $E=u_x^2+v_x^2$, $F=u_xu_y+v_xv_y$, $G=u_y^2+v_y^2$

$$P_f(z)=P(z)\equiv P(x,y)=\frac{E+G}{J}\equiv\frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$P(x,y)=q(x,y)+\frac{1}{q(x,y)}$$

トオクトキ

(1) $qJ\geqq G\geqq\frac{J}{q}$

ガ成立スルコトガ証明セラレテヲル。

更ニコヽデハ前記論文中ノ定理1及ビ2ヲ定理A，定理5ヲ定理Bトシテ参照スルコトニシマス。

2. $w=f(z)$ ガ z 一平面ノ連結領域 Γ ノ内部及ビ境界デ P. m. f. ナリトスル。然シ境界上ノ一点デハ Pole デナイ特異点ヲモツモノトスル。コノ点ヲ $z=0$ トスル。

更ニ次ノ様ナ有限ノ値 $w=\omega$, $r>0$ 及ビ領域 Γ' ガアルトスル、乃チ

1° Γ' ハ Γ ノ内部ニアル。

2° Γ' ノ境界上デハ $|f(z)-\omega|\geqq r$.

3° Γ' ノ内部ニ $|f(z)-\omega|<r$ トナルヤウナ点 z ガ少クトモ一ツ存在スル。

然ルトキ Γ' ノ内部ニ次ノ如キ z ヲ含ム連結領域 $\Delta_\omega(r)$ ガキメラレル．乃チ

1* $f(z)$ ハ $z=0$ ヲ除ク $\Delta_\omega(r)$ ノ境界上ノ点及ビソノ内部デ P. P. デアル。

2* $\Delta_\omega(r)$ ノ $z=0$ ヲ除ク境界上ノ点デハ

$$|f(z)-\omega|=r$$

3* $\Delta_\omega(r)$ ノ内部デハ $|f(z)-\omega|<r$

$w=f(z)$ ノ逆函数ヲ $z=\varphi(w)$ トスレバ，$\Delta_\omega(r)$ ノ内点及ビ $z=0$ 以外ノ境界点ニハ $z=\varphi(w)$ ノ P. P. ナ点モシクハ代数分岐点ガ対応スル。

z 一平面上ノ $\Delta_\omega(r)$ ノ $w=f(z)$ ニヨル Riemann surface R_r ヲ作ルト，$J(f)=0$ ナル点ニ対シテハ代数分岐点ガ数個シアリ且ツ逆モ成立スル。又 R_r ハソノ境

原上ニ一般ニハ transcendental point ヲ含ム。

コヽニ transcendental point ハ次ノヤウニ定義セラレル。R_ρ ノ点 w' ニ近ヅク $|w-\omega|\leqq\rho$ カラ出ナイ道 G ガアッテ，G ノ点ハ w' ヲ除イテハ R_ρ ノ内点デ且ツ w ガ G ニ沿ッテ w' ニ近ヅクトキ対応スル z ガ 0 ニ近ヅクトキ w' ヲ R_ρ ノ transcendental point トイヒヅケル。

モシ z 一平面上ニ $\Delta_\omega(\rho)$ カラ出ナイ $z=0$ ニ近ヅク道 Γ ガアリソノ上デ $f(z)$ ガアル limit value w' ニ近ヅクナラベ，点 w' ハ R_ρ ノ transcendental point デアル。

3. Iversen ノ次ノ論文

F. Iversen, Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage dún point singulier, Öfvers. of Finska soc., t. 58.

ニ於テイロイロノ結果ヲ出スノニ次ノ定理ガ重要ナ役割ヲ演ジテヲル。

モシ $\Delta_\omega(\rho)$ ノ内部ニ $f(z)=\omega$ ヲ満足スル点ガナイナラベ，コノ領域ハ原点ヲ境界点トシテモテ，ソノ内部ニ ω ノ収斂路ヲ含ム。

故ニコレニ対応スル定理ヲ証明スレバヨイコトニナル。

Γ 内ニアリ且ツ $|z|=\rho$ ナル z ニ関シテノ $P_f(R)$, $Q_f(z)$ ノ maximum ヲ $P(\rho)$, $Q(\rho)$ トカク。

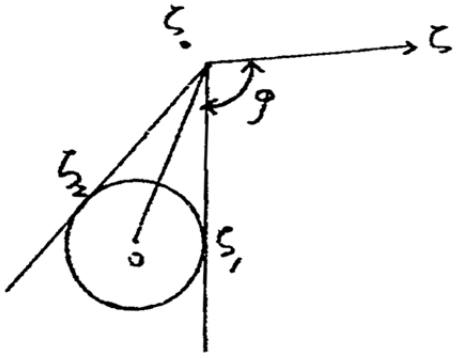
定理1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rp(r)}$ （又ハ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rg(r)}$）ガ発散スルトスル。

モシ $\Delta_\omega(\rho)$ ノ内部ニ $f(z)=\omega$ ヲ満足スル点ガナイナラバ，コノ領域ハ原点マデノビテ居テ，ω ノ収斂路ヲ含ム。

証明： $\zeta=\frac{1}{f(z)-\omega}$ トオクトキ，Aカラ $p_\zeta(\theta)=p_f(\theta)$,

$$g_\zeta(\theta)=g_f(\theta).$$

$\Delta_\omega(\rho)$ 内デハ $|\zeta|>\frac{1}{\rho}$ デ，$\Delta_\omega(\rho)$ ノ境界上デハ $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$



今 $\Delta_\omega(\rho)$ 内ニ任意ノ一点 z_0。$(J(f)\neq 0)$ ニ対シテ ζ ノリーマン面 $\overline{R}_\rho$ ノ一点 ζ_0 ガ定マリ且 $|\zeta_0|>\frac{1}{\rho}$.

ζ_0 カラ円 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ ヘ切線 $\zeta_0\zeta_1$, $\zeta_0\zeta_1'$ ヲ引ク．ζ_0 カラ円 O ニ交ハラナイ ray ヲ引クトキ高々 null set ニ属スル φ ヲ除イテヘ

$$\arg.\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_1-\zeta_0}=\varphi$$

ナル直線上ニヘ ∞ マデ内点ダケデ代数合岐点モ transcendental point モ存在シナイコトヲ証明スル。

然ルニ $S=\log z=\sigma+i\tau$ トシ，$\zeta(z(s))=\zeta_1(s)=u+iv$ トオクト，Aカラ $p(z)=p(s)$, $g(z)=g(s)$ デアル。

ζ_0 カラ出ル ray ガ transc. pt. 又ハ代数分岐点ニ出合フトキハ，ソレカラサキヲキリトリ、然ラザルトキハ ζ_0 カラ∞マデノ ray ヲトル。カヘル ray ノ部分デ覆ハレル $\overline{R}_\varphi$ ノ部分ヲ S トスル。

有限ノ長サノ ray ニ対応スル φ ガ null set ヲ作ルコトヲ示セバヨイ。有限ノ長サノ ray ノ ζ_0 トハ異ナル端点カ代数分岐点ニナルモノハ可附番個シカ存在シナイカラ，カヘル端点ガ transc. pt. ニナル場合ヲ考ヘレバヨイ。カカル端点ノ集合ヲ M トス。更ニ $|\zeta-\zeta_0|\leqq R$ 内ニアルカカル M ノ部分 M_R ヲ考ヘレバヨイ。何トナレバ，対応スル φ ノ集合ガ null set ナラバ，M_{R_n} $(R_1<R_2<\cdots\cdots;\ R_n\to\infty)$ ノ和集合モ亦 null set ニナルカラデアル。

今 S_ζ ヲ $|\zeta-\zeta_0|\leqq R$ ト S トノ共通部分トスル。S_ζ ノ内部ハ $s(\zeta)$ ニヨリ schlicht ナ domain S_s ニ pseudo conformally ニ一対一ニ map サレル。コノ際 S_s ハ $-\infty$ ヲ外点カ境界点ニモツ。

任意ニ $r>0$ ヲトリ s-平面デ $R(s)=\log r$ ノ上ノ S_s ノ内部ニ属スル可附番ケノ線分ノ全体ヲ $Q_s(r)$ トスル。

$Q_s(r)$ ハ S_s 内デ境界点 $s=-\infty$ ト $s=\log s(\zeta_0)$ トヲ相分ツ。故ニ $Q_s(r)$ ノ写像 $Q_\zeta(r)$ ハ S_ζ 内デ $\zeta=\zeta_0$ ヲスベテノ M_R ノ点カラ分ツ。コレカラシテ対応スル φ 集合ノ測度 $m(\varphi)$ ハ $Q_\zeta(r)$ ノ各弧ノ開キノ和ヨリ大ナラズ。$Q_\zeta(r)$ ノ各弧ノ南ナハ高々弧ノ長サヲ ζ_0 カラ $Q_\zeta(r)$ マ

デノ最短距離 δ_r デワッタモノニ等シイ。然ルニ r ヲ或ル定ッタ $r_0\,(>0)$ ヨリ小ニトレバ，δ_r ハ r_0 ニノミ depend スル $\delta_0\,(>0)$ ヨリ常ニ大キリ。従ッテ $Q_S(r)$ ノ各弧ノ長サノ和 $S(r)$ が $r\,(0<r\leqq r_0)$ ノ適当ナエヲビ方ニヨリ任意ニ小ニサレ得ルコトヲ云ヘバヨイ。

$$\left(S(\sigma)\right)^2=\left(\int_{Q_S(r)}|u_\tau+iv_\tau|\,d\tau\right)^2\leqq 2\pi\int_{Q_S(r)}g(\sigma;\tau)J(\sigma;\tau)\,d\tau \qquad (by(1))$$

$$\leqq 2\pi\max_{Q_S(r)}g(\sigma;\tau)\int_{Q_S(r)}J(\sigma;\tau)\,d\tau.$$

$$g(\sigma)=\max_{Q_S(r)}g(\sigma;\tau)$$

$$\int_{\log r}^{\log r_0}\frac{S(\sigma)^2}{g(\sigma)}\,d\sigma\leqq 2\pi\int_{\log r}^{\log r_0}\int_{Q_S(r)}J(\sigma;\tau)\,d\sigma\,d\tau\leqq 2\pi^2R^2,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_r^{r_0}\frac{S(r)^2}{r\,g(r)}\,dr\leqq 2\pi^2R^2$$

今 ε ヲ任意ニ小ナル正数トスレバ，少クトモ一ツノ値 r ニ対シテ $S(r)<\varepsilon$ ナリ。

然ラザルモノトスレバ，

$$\int_r^{r_0}\frac{S'^2(r)\,dr}{r\,g(r)}\geqq\varepsilon^2\int_r^{r_0}\frac{dr}{r\,g(r)}\to\infty,\quad \text{as } r\to 0$$

コレハ矛盾デアル。乃チ $\zeta=0$ カラ ∞ マデ $\overline{R}_\rho$ 内ニアル直線ガアルコトニナル。ヨッテ定理1ハ証明セラレタ。

コレカラ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. $w=f(z)$ が孤立真性特異点 $z=0$ ノ近傍デ

p. m. f. 且ツ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rp(r)} \quad \left(\text{又ハ } \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rg(r)}\right)$$

が発散スルトスル。

モシ $w=\omega$ ヲ $z=0$ ノ近傍デトラナイナラバ，$f(z)$ ガソノ上デ ω ニ近ヅク如キ収斂路が存在スル。

証明： ω ヲ有限トシテモヨイ。z 一平面上ニ原点ヲ中心トスル充分小ナル円 C ヲ画キソノ内部デ原点ヲ除イテ及ビソノ周上デ $f(z)$ ハ P. m. デアルヤウニ出来ル。C上デ $|f(z)-\omega|$ ハ minimum $r(>0)$ ヲ有ツ。一方角谷氏ノ定理Bニヨリ C ノ内部ニ $|f(z)-\omega|<r$ ナル点が存在スル，故ニ (C) ヲ満足スル $\Delta_\omega(r)$ が C 内ニ存在シ $f(z)=\omega$ ノ根ハソノ内部ニ存在シナイカラ定理1ニヨリコノ $\Delta\omega(r)$ ハ原点ニ近ヅク ω 収斂路ヲ含ム。

又定理1ノ証明カラ容易ニ術ル次ノ Lindelöf's theorem ノ拡張が得ラレル。

定理3. 函数 $f(z)$ が或領域 T ノ内部デ F. m. f. デ，ソノ境界上ノ高々有限個ノ点 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ ヲ除イテハ各点ニ対シテ任意ノ $\varepsilon(>0)$ ニ対シテソノ近傍 U が U·T ノ内部ニ属スルスベテノ z ニ対シテ常ニ

$$|f(z)|<M+\varepsilon$$

が成立スル如ク定メラレ且ツ除外点ニ対シテハ $|z-z_i|=r_i$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ トカクト

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr_i}{r_i\,p(r_i)}$ (又ハ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr_i}{r_i\,q(r_i)}$) $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

ガ発散スルトスル。

然ルトキハ、コノ領域Π内デ $|f(z)|<M$ トナルカ、サウデナケレバ有界ニハナリ得ナイ。

E. Iversen ノ前記ノ論文デ重要ナ役目ヲツトメテヲル前記ノ定理ノ代ハリニ定理1ヲ用ヒテ Iversen ノ証明ヲソノマヽ辿ッテユケバ、$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{r\,p(r)}$ ガ発散スルトイフ條件ノ下ニ、$f(z)$ ガ両端ガ原点ニ近ヅイテヲル、単一じよるだん曲線ニヨリカコマレタ領域ノ内部及ビ原点ヲ除ク境界上デ P. m. f. トスル、モシソノ境界ニ沿フテ原点ニ近ヅクトキ $f(z)$ ガ一定ノ極限値ヲ有スルトキハ $f(z)$ ハソノ領域内デ原点ニ近ヅクトキ一様ニ同ジ値ニ近ヅクカ、然ラザレバ、$f(\infty)$ ハ與ヘラレタ任意ノ値ニイクラデモ近ヅキ得ルトイフコトガ結論サレル。

コノコトガ証明サレルト、何時モマル方法、三ツノ値ヲトラナイ modular function $m(w)$ ヲ用ヒテ、$Z=m(f(z))$ ニツイテ考ヘル。Z ハ又 P. r. f. デ Z トナトハ同一ノ P. g ヲモテ、尚コレガ一意函数ナルコトハ Monodromie Satz (Kerékjartó 175頁) ニヨッテ明カデアル。

次ニソノ結果ノ二三ヲ定理ノ形デ述ベテオキマス。

定理3. 両端ガ原点ヘ近ヅク単一じよるだん曲線ニヨッテカコマレタ領域ノ内部又ハソノ曲線上デ原点ヲ除イテ

$f(z)$ が p.m.f. デアルトシ且ツ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rg(r)}\quad\left(\text{又ハ}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rp(r)}\right)\to\infty$$

ナラバ，$f(z)$ がソノ Jordan curve ニ沿フテ両方カラ原点ニ近ヅクトキ同一ノ極限値 a ヲモッナラバ $f(z)$ ハソノ領域内デ原点ニ近ヅクトキ一様ニ a ニ近ヅク カ或ハ與ヘラレタル任意ノ値ノ中高々二ツヲ除イテ ∞ 回ソノ領域内デソレラノ値ヲトル。

定理4. 定理3デ述ベタ々ウナ條件ノ下デ $f(z)$ がソノ Jordan curve ニ沿フテ両方カラ原点ヘ近ヅイタトキノ極限値が異ナルトキハ，$f(z)$ ハソノ領域内デ高々二ツノ値ヲ除イテ次ベテノ値ヲ無限回トル。