



Title	位相幾何學ノ形式化（Ⅱ）
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 147, p. 315-321
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74579
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

653. 位相幾何學ノ形式化(II)

寺 阪 英 孝 (阪大)

§ 3. 今度ハ A^{acac} + ν operationヲ考ヘヨシ.

A^{acac} ハ $(A^a)^{cac}$ 即チ A ノ閉包ノ内部デアツテ, Kuratowskiノ所謂 *ensemble régulier ouvert* (Fund. Math. III) 又ハ *domaine ouvert* (Topologie I デ改稱) デアル. 此処デハ前者=從ツテ正則開集合ト云フコト=スル. A^{acac} ハ長イカラ:

(定義) A^{acac} ヲ A^P トカキ, A =對スル正則開集合ト呼ブ.

先ツ最初=

$$(13) \quad A^{PP} = A^P$$

(証) $A^{acacacac} = A^{aca}$ (Kuratowski) 等式)ヲ証スレバヨイ. コレハ (i) $A^{aca} \supset A^{ac}$ (公理 A_3) = C 及ビ a ヲ交互ニホドコシ $A^{acac} \subset A^{acc} = A^a \rightarrow A^{acaca} \subset A^{aa} = A^a \rightarrow A^{acacac} \supset A^{ac} \rightarrow A^{acacacac} \supset A^{aca}$. (ii) 又 $A^{acacac} \supset A^{acac}$ カラ同様 = $A^{acacacac} \subset A^{aca}$. ヨツテ等式ヲ得ル. ———

次=

$$(14) \quad A \subset B \rightarrow A^P \subset B^P$$

$$(15) \quad (A+B)^P \supset A^P + B^P$$

$$(16) \quad (AB)^P \subset A^P \cdot B^P$$

1) 諸式ニ a 及ビ C ノ operationヲ譯無ク出セル.

次 $A^p = 0$ なる集合ヲ考ヘヨシ。

(定義) $A^p = 0$ 即チ $A^{acac} = 0$ なる集合 A ヲ 粗集合 (*nirgends dicht, non-dense*) ト云フ。

(14) カラ直グニ

(17) $A^p = 0 \rightarrow (AB)^p = 0$ (粗集合ノ部分集合ハ粗) ガ出ル。更ニ

$$(18) \quad A^p = 0 \rightarrow (A+B)^p = B^p$$

$$(19) \quad A^p = 0 \rightarrow (BA^c)^p = B^p \quad [\text{即 } (A-B)^p = B^p]$$

(集合 = 粗集合ヲ加ヘテモ引イテモ正則開集合ハ同ジナル)

(証) (18) ノ証。

$$(A+B)^{acac} \xrightarrow{A_2} (A^a + B^a)^{cac} \xrightarrow{C_3} (A^{ac} B^{ac})^{ac}$$

B^{ac} ハ開集合ナル故 (11) ノ U ヲ B^{ac} トシ A ヲ A^{ac} トスレバ

$$(A^{ac} B^{ac})^a \supset A^{aca} B^{ac}$$

ヨツテ兩邊ノ C ヲトレバ $\supset$ ガ逆ニナツテ

$$(A^{ac} B^{ac})^{ac} \subset (A^{aca} B^{ac})^c = A^{acac} + B^a$$

$$\therefore (A+B)^p \subset A^p + B^a = B^a \quad (\text{假定} = \exists \text{ } A^p = 0)$$

$$\therefore (A+B)^p = (A+B)^{pp} \subset B^{ap} = B^p$$

然ルニ (14) カラ $(A+B)^p \supset B^p$

ヨツテ兩者ハ等シイ。

(19) ノ証

$$B^p \xrightarrow{(14)} (BA + BA^c)^p \xrightarrow{(17), (18)} (BA^c)^p \text{ ——— }$$

(17), (18)ノ系トレテ

$$(20) \quad A^p = 0, B^p = 0 \rightarrow (A+B)^p = 0, (AB)^p = 0$$

(粗集合ノ和、積ハ矢張り粗デアアル)

粗集合ノ例ハ閉集合カラソノ内部ヲ引イタ残リ、即チ

$$A^a - A^{acac} = A^a A^{aca} \text{デアアル。式ダイフト}$$

$$(21) \quad (A^a A^{aca})^p = 0 \quad \text{又ハ} \quad (A^a A^{pc})^p = 0$$

(閉集合ノ境界ハ粗デアアル。)

$$(証) \quad \text{一般} = (A^a B^a)^a = A^a B^a \quad (\text{閉集合ノ積ハ閉集合})$$

ナコトガ証明出来ル。コレヲ使フト

$$\begin{aligned} (A^a A^{aca})^{acac} &= (A^a A^{aca})^{cac} \stackrel{(10)}{=} A^{acac} A^{aca \cdot cac} \\ &\stackrel{A_3}{=} 0 \end{aligned}$$

A+ル集合ノ閉苞 A^a カラAノ内部 A^{cac} ヲ引イタモノ
即チ $A^a - A^{cac} = A^a A^{ca}$ が粗デアアルヨウナ集合Aヲ正則集
合ト名ヅケコレヲ研究スルノデアアルガ、ソノ爲ニ先ヅ等式ヲ
証明スル。

$$\begin{aligned} (22) \quad (A^a A^c)^p &= (A^p A^c)^p = (A^p A^{ca})^p = (A^a A^{ca})^p \\ &= (A^{ca} A)^p = (A^{cp} A)^p = (A^{cp} A^a)^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (証) (i) \quad A^a &\stackrel{(4)}{=} A^a (A^{aca} + A^{acac}) \rightarrow A^a A^c \\ &= A^a (A^{aca} + A^p) A^c \subset A^a A^{aca} + A^p A^c \\ &\xrightarrow{(21), (18)} (A^a A^c)^p = (A^p A^c)^p \end{aligned}$$

$$(ii) \quad A^p \text{ハ閉+ル故} (12) = \text{於テ} U = A^p, A = A^c \text{ト置ケバ}$$

$$(A^p A^c)^a = (A^p A^{ca})^a \rightarrow (A^p A^c)^p = (A^p A^{ca})^p$$

$$(iii) \quad A^a = A^a (A^{aca} + A^{acac}) \rightarrow A^a A^{ca} = A^a (A^{aca} + A^p) A^{ca}$$

$$\subset A^a A^{ca} + A^p A^{ca} \xrightarrow{(20), (18)} (A^a A^{ca})^p = (A^p A^{ca})^p$$

コレが (22) の上の方の式が証明サレタ。サテ

$$A^a A^{ca} = (A^c)^{ca} (A^c)^a$$

ナル故, 上式ノ A ノ代リ = A^c ヲ入レレバ下ノ方ノ式が出
ル。

$$(定義) \quad (A^a A^{ca})^p = 0 \quad 即 \quad (A^a - A^{ca} c)^p = 0$$

即チ A ノ開集合カラ A ノ内部ヲ引イタ残ガ粗ナル如キ集合 A
ヲ 正則集合 トイフ。(22) ノドレカーツガ 0 ナラバヨイ。特ニ
 $(A^a A^c)^p = 0$ が便利デアル。

任意ノ $A = \cup K \quad 0 \subset A^a \cdot A^{ca}$ ヲレ故 (21) = ヨツテ
 $0^p = 0$ (0 ハ粗)、ヨツテ

(23) 開集合, 閉集合, 粗集合ハイツレモ正則デアル。

$$A^a A^{ca} = (A^c)^{ca} (A^c)^a \quad \text{タカラ}$$

(24) A が正則ナラバ A^c も正則デアル。

(25) 正則集合ノ和、積ハ又正則デアル。式デハ

$$(A^a A^c)^p = 0, (B^a B^c)^p = 0 \rightarrow ((A+B)^a (A+B)^c)^p = 0 \\ ((AB)^a (AB)^c)^p = 0$$

$$(証) \quad (A+B)^a (A+B)^c = (A^a + B^a) A^c B^c \subset A^a A^c \\ + B^a B^c$$

$$\text{及ビ} \quad (AB)^a (AB)^c \subset A^a B^a (A^c + B^c) \subset A^a A^c \\ + B^a B^c$$

カラ (20) = ヨツテ出ル。

次ニ両集合 A, B = 対スル正則開集合 A^p, B^p が等シイ
爲ノ条件ヲ出サウ。先ツ

$$(26) \quad (AB^c)^p = 0 \rightarrow A^p \subset B^p$$

$$\begin{aligned} \text{(証)} \quad (AB^c)^p = 0 &\rightarrow A^p \stackrel{(4)}{=} (A(B+B^c))^p \\ &= (AB+AB^c)^p \stackrel{(18)}{=} (AB)^p \subset B^p \end{aligned}$$

コレヨリ直チニ

$$(27) \quad (AB^c)^p = 0, (BA^c)^p = 0 \rightarrow A^p = B^p$$

集合が特ニ正則ナラバ、コノ逆ニ成立ツノデアル。先ツ

$$\begin{aligned} (28) \quad A^p \subset B^p, (B^a B^{ca})^p = 0 \quad (B \text{ が正則}) \\ \rightarrow (AB^c)^p = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(証)} \quad (AB^c)^p &\stackrel{(16)}{\subset} A^p B^{cp} \quad (A^p \subset B^p \text{ ナル故}) \subset B^p B^{cp} \\ &\stackrel{(10)}{=} (B^a B^{ca})^p = 0 \end{aligned}$$

ソレ故 A, B が共ニ正則ナラバ (27) ノ逆ニ成立ツ。

即チ

$$\begin{aligned} (29) \quad A^p = B^p, \text{ 且ツ } A, B \text{ ハ正則} &\rightarrow (AB^c)^p = 0, \\ &(BA^c)^p = 0 \end{aligned}$$

又 A, B が正則ナラバ A^p = B^p ナラバ (29) が成立シ、從ツテ ((A^c)^c B^c)^p = 0, ((B^c)^c A^c)^p = 0 トナル故更ニ (27) ヲ適用スレバ (A^c)^p = (B^c)^p トナル、即チ

$$(30) \quad A^p = B^p \text{ 且ツ } A, B \text{ ハ正則} \rightarrow A^{cp} = B^{cp}$$

(27) ト (29) ヲ用キレバ、更ニ

$$\begin{aligned} (31) \quad A^p = B^p, A, B \text{ ハ正則, } C \text{ ハ任意} &\rightarrow (A+C)^p \\ &= (B+C)^p, \quad \rightarrow (AC)^p = (BC)^p. \end{aligned}$$

$$\text{証明スルニハ } ((A+C)(B+C)^c)^p = 0, ((B+C)(A+C)^c)^p = 0$$

等ヲ出シテ見レバヨイノデアル。

§ 4. コノ § デハ正則集合許考ヘルコト=スル。今記号トシテ

$$A, B \text{ が正則デ } A^P = B^P \text{ ノトキ } A \approx B$$

ト書クコト=スルト, $0^P = 0$ ナレ故 (証略)

$$A^P = 0 \quad \wedge \quad A \approx 0$$

ト書ケル。コノ記号ヲ用キルト (27), (29), (30), (31) ハ夫々

$$(27)^* \quad AB^C \approx 0, \quad BA^C \approx 0 \longrightarrow A \approx B$$

$$(29)^* \quad ABC \approx 0, \quad BA^C \approx 0 \longleftarrow A \approx B$$

$$(30)^* \quad A \approx B \longrightarrow A^C \approx B^C$$

$$(31)^* \quad A \approx B \longrightarrow A+C \approx B+C, \quad AC \sim BC$$

ト書ケル。 (31)* ハ尙一般ニ

$$(32) \quad A \approx B, \quad C \approx D \longrightarrow A+C \approx B+D, \quad AC \approx BD,$$

$\approx$ ハ斯様ニシテ = ト同様ノ性質ヲ持ツ譯デアル。

以上ノコトヲ利用シテ最初ノ問題ヲ考ヘテ見ヨウ。今正則開集合 ($A^P = A$) ノミヲ採用スルコトトシ, ソレニツキ正則和ナルモノヲ次ノ様ニ定義スル。

$$A \oplus B = (A+B-AB)^P = ((A+B)(AB)^C)^P$$

即チ

$$(33) \quad A \oplus B = (AB^C + BA^C)^P$$

コウ定義シテカラ $\oplus$ ナル加法ガ *associative* デアルコトヲ証明シテ見ヨウ。即チ次式ヲ証明スルノデアル。

$$(34) \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

コノ左辺ハ

$$(A \oplus B) \oplus C = \{(AB^c + BA^c)^p C^c + (AB^c + BA^c)^{pc} C\}^p$$

=等しい。今

$$AB^c + BA^c = D$$

ト置ケバ

$$(A \oplus B) \oplus C = (D^p C^c + D^{pc} C)^p$$

トナル。サテ A, B, C ハイヅレモ正則ナル故、定理 (24) = ヨツテ $A^c, B^c, C^c \in$ 正則、從ツテ定理 (25) = ヨツテ $D \in$ 亦然リ、 D^p ハ勿論ノ事デアル、ヨツテ

$$D^{pp} = D^p \quad [(13)] \quad \text{即チ} \quad D^p \approx D$$

カラ (30)*, (31)*, (32) = ヨツテ

$$D^p C^c + D^{pc} C \approx DC^c + D^c C$$

即チ、左辺ノ p フトツタ $\in$ ノハ右辺ノ p フトツタ $\in$ ノ = 等しい。由ツテ

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \oplus C &= \{(AB^c + BA^c)C^c + (AB^c + BA^c)^c C\}^p \\ &= (AB^c C^c + BA^c C^c + CA^c B^c + ABC)^p \end{aligned}$$

コレカラ容易 = (34) ノ等式が出セル譯デアル。

$$(A \oplus B) C = AC \oplus BC$$

ナル分配律 $\in$ 成立スルが証明ハ略ス。

以上デ初メノ目的ハ達シタガ、コレダケデ店仕舞トスルノハ惜しい。

コノ次ハ A^{acaca} トル operation ト所謂 Baine ノ性質トノ關係等ヲ出サウト思フ。