



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Harrノmeasureニ就イテ                                                            |
| Author(s)    | 角谷, 静夫                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1937, 148, p. 339-348                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74583">https://doi.org/10.18910/74583</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 657. Haar's measure = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

Haar's measure が *unique* デアルカドウカト云フ問題ハ J. v. Neumann 及ビ A. Weil = ヨツテ論セラレタ。コノ *unique* デアルトイフノハ 勿論 *constant factor* ヲ除イテ *unique* デアルコトヲ指スノデアル。

最初 J. v. Neumann ハ *compact + group* = 對シテソレガ *unique* デアルコトヲ証明シ、且ツ *left-invariant + measure* ト *right-invariant + measure* トガ一致スルコトモ示シタ。(Compositio Math., vol. 1, 1934)

其ノ後 J. v. Neumann ハ *locally compact, separable + group* ノ場合ニ *uniqueness* ノ定理が成立スルコトヲ証明シタ。(Recueil, Math., 1(43), 1936)。

コノ時ハ *left-invariant + measure* ト *right-*

*invariant + measure* トハ必ずしも一致シナイノ  
デアル。

又一方コレト相反 = A. Weil ハ一般ノ *locally bi-*  
*compact + group* = 對シテ  $\in$  Haar *measure*  
が定義シ得ラレ且ツソレが *unique* デアルコトヲ証明シ得  
タト報ジテキル。(C.R.t. 202, 1936) A. Weil ノ証明  
ハ J.V. Neumann ノ証明トソノ方法が全然異ツテアルト云  
フコトデアルが未ダ発表サレナイノデ如何ナル方法ニヨルノ  
コトカラナイ。(コレハ恐ラク近イウチニ出ルコトニナツテ  
キル *Memorial des Sciences Math.* ノ一冊デアル  
A. Weil ノ著書中ニ書カレルニト思ハレル)

次ニ述べヨウトスル Haar *measure* ノ *unique-*  
*ness* ノ証明ハ J.V. Neumann ノ証明ヲ簡單ニシタモノデ  
アル。

V. Neumann ハ *left-invariant + measure* ノ  
*uniqueness* ノ証明 = *right-zero-invariance*  
ナル概念ヲ用ヒテキルが、コレハ非常ニ面白い又重要ナコ  
トデアルケレドモ必要ノナイコトデアル。コレハ V. Neu-  
mann が *left-invariant + measure* ノミヲ考  
ヘテキタカラデ *right-invariant + measure* ヲ  
モ同時ニ考ヘレバ証明が簡單トナルノデアル。即チ V. Neu-  
mann ハ *double integral* ヲ考ヘルトキニ度トモ  
同ジ *measure* (*left-invariant + measure*)  
ヲ用ヒテキルが、コレハ必要ノナイコトデ、第二ノ *integral*

トシテ *right-invariant + measure* = ヨル  
*integral* ヲトレバ議論ガ簡單トナルノデアアル。

*Group* ノ *measure* ヲ考ヘル代リ = , 一般 = 空間  
 $S$  ト  $S$  ヲ  $S$  自身ヘ *homeomorphic* = 寫像スル変換  $\sigma$  ,  
作ル *group*  $G$  ガ興ヘラレタトキ  $G$  = 属スル変換  $\sigma$  =  
對シテ *invariant* +  $S$  ノ *measure* ヲ問題トスルナラ  
バ、コノコトハ明瞭トナルノデアアル。

即チカノ *measure* ノ *uniqueness* ヲ証明シヨウトス  
ル時 = ハ *product-space*  $S \times G$  ナノ *integral* ヲ  
考ヘルコト = ナルノデアアルガコノ時  $G$  ノ *measure* トシテ  
*right-invariant* + モノヲ取レバヨイト云フコトハ明  
カデアアル。

*uniqueness* ノ 定理ノ 証明

証明ハニツノ部分 = 分レル。

(I) *Group*  $G$  ト  $\mu$  ノ *left-invariant + measure*  $\mu$  ガ  
興ヘラレタ時  $G$  ノ *Borel* 集合  $E$  ガ任意、 $a \in G$  = 對シテ  $\mu(E \dot{+} aE - E \cdot aE) = 0$  ヲ満足スレバ  $\mu(E) = 0$  又ハ  $\mu(G - E)$  トナル。コノ  
性質ヲ  $G$  ガ *left-ergodic* デアルトナヅテアル。

(II) *locally compact, separable + group*  $G$  ガ *left-ergodic* デアレバ  $G$  ノ *left-invariant + measure* ハ *unique* デアル。

(I) ノ 証明

$E$  ノ *characteristic function* ヲ  $\varphi(x)$  トセヨ。  
 $\varphi(ax)$  ハ  $a^{-1}E$  ノ *characteristic function* デアル  
カラ  $|\varphi(ax) - \varphi(x)|$  ハ  $E \dot{+} a^{-1}E - E \cdot a^{-1}E$  ノ *characteris-*  
*tic function* トナル。然ルニ此集合ハ  $\mu$ -*measure* ガ 0 デ

アルカラ

$$\int |\varphi(ax) - \varphi(x)| d\mu(x) = 0$$

デアル。恒シ積分ハ  $x = \text{ツキ}$ 、 $\mu$ -measure = 開シテ  $G$  全体 = ホドコスモ、トスル。コノ関係ハ任意ノ  $a \in G =$  對シテ 成立スルカラ任意ノ  $G$  ノ *right-invariant* + measure  $\lambda =$  對シテ

$$\iint |\varphi(ax) - \varphi(x)| d\mu(x) d\lambda(a) = 0$$

コノ  $\int \dots d\lambda(a)$ 、意味モ前ト同様デアル。E が Borel 集合デアレコトヨリ  $|\varphi(ax) - \varphi(x)|$  ハ  $x, a$  ノ二変数ノ函数ト考ヘテ *measurable* トナルカラ Fubiniノ定理が應用デキテ

$$\int |\varphi(ax) - \varphi(x)| d\lambda(a) = 0 \quad (1)$$

ガ *almost all*  $x =$  對シテ成立スル。即チ  $\mu$ -measure が 0 + 集合  $M$  が定マリ  $x \in G - M =$  對シテ (1) が成立スルデアル。ヨツテ  $\lambda$ -measure が 0 + 集合  $E_x$  (コレハ  $x = \text{depend}$  スル!) が定マリ  $a \in G - E_x$  + ルトキ

$$\varphi(ax) = \varphi(x) \quad (2)$$

トナル。同様ニ任意ノ  $y \in G - M =$  對シテ  $\lambda$ -measure が 0 + 集合  $E_y$  が定マリ  $b \in G - E_y$  + ルトキ

$$\varphi(by) = \varphi(y) \quad (3)$$

トナル。ヨツテ若シ適當ニ  $a, b$  ヲ取ツテ  $ax = by$  ナラシメルコトが出来レバ (2), (3) ヨリ  $\varphi(x) = \varphi(y)$  トナリ、 $x, y$

が  $G-M$  , 任意ノ点  $\mu$  アルコトヨリ

$$\varphi(x) = \text{const. } x \in G-M, \quad \mu(M) = 0$$

即チ  $\mu(E) = 0$  スハ  $\mu(G-E) = 0$  トナツテ (I) ノ証明  
が出来ルノデアアル。

ヨツテ問題ハカナル  $a, b$  ヲ撰ブコト = 帰スルノデアアル  
ガコレハ入ガ *right-invariant* ナルコトヨリ可能デア  
アル。何トナレバ  $a$  ガ  $G-E_x$  ヲウゴクトキ  $a \cdot x \in G-E_x \cdot X$   
ヲウゴキ、同様ニ  $b$  ガ  $G-E_y$  ヲウゴクトキ  $b \cdot y \in G-E_y \cdot Y$   
ヲウゴキ、而モ  $\lambda(E_x \cdot X) = \lambda(E_x) = 0, \lambda(E_y \cdot Y) = \lambda(E_y)$   
 $= 0$  ナルコトヨリ  $(G-E_x \cdot X) \cdot (G-E_y \cdot Y) = G-E_x \cdot X - E_y \cdot Y \neq \Lambda$   
( $\Lambda$ : 空集合) トナルノデアアル。

## (II) ノ証明

$G$  7 *locally compact, separable + group*  
トセヨ。

$G$  , *left-invariant + measure* ガ *unique*  
デナイトスレバ  $G$  , ニツノ *left-invariant + mea-*  
*sure*  $\mu_1, \mu_2$  トニツノ Borel 集合  $E_1, E_2$  ガ存在シ  
テ

$$\mu_1(E_1), \mu_2(E_1), \mu_1(E_2), \mu_2(E_2) > 0$$

$$\frac{\mu_1(E_1)}{\mu_2(E_1)} > \frac{\mu_1(E_2)}{\mu_2(E_2)}$$

トナル。

$$\frac{\mu_1(E_1)}{\mu_2(E_1)} > \alpha > \frac{\mu_1(E_2)}{\mu_2(E_2)}$$

ナル real number  $\alpha$  をとり

$$\mu(E) = \mu_1(E) - \alpha \mu_2(E)$$

ヲ考へル。  $\mu(E)$  ハ total additive + set function  
デコレハ任意ノ compact + 範囲デ bounded varia-  
tion デアル。 ヨツテ任意ノ open set デノ closure  
ガ compact ナルヲトれば  $O$  ハニツノ Borel 集合  
 $P, N =$  分レテ ( $O = P + N, P \cdot N = \Lambda$ ),

任意ノ  $E \subset P$  ナル Borel 集合  $E =$  対シテハ  $\mu(E) \geq 0$ ,

任意ノ  $E \subset N$  ナル Borel 集合  $E =$  対シテハ  $\mu(E) \leq 0$

トナル。 先ガコレヲ証明シヨウ。

$O =$  於テ  $\mu$  ハ bounded variation デアルカラ  
 $E \subset O$  ナルアラユル Borel 集合  $E =$  対スル  $\mu(O)$  ノ上限  $K$   
ハ有限デアル。 且ツ上限ノ性質ヨリ  $E_n \subset O, \mu(E_n) > K - \frac{1}{2^n}$   
ナル Borel 集合  $E_n$  が存在スル。

$$P = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n,$$

$N = O - P$  トオケバ  $O = P + N$  が求ムル分解デアル。 何ト  
ナレバ先ヅ  $P, N$  が Borel 集合ヲ  $P \cdot N = \Lambda$  ナルコトハ明  
カデアアル。

次ニ  $\mu(P) = K$  トナルコトヲ証明シヨウ。 コレガ証明  
出来レバ任意ノ  $E \subset P$  ナル Borel 集合  $=$  対シテ  $\mu(E) \geq 0$ ,  
任意ノ  $E \subset N$  ナル Borel 集合  $=$  対シテ  $\mu(E) \leq 0$  トナ

ルコトハ明カデアル。實際アル  $E \subset P$  = 對シテ  $\mu(E) < 0$  ト  
 +レバ  $\mu(P-E) = \mu(P) - \mu(E) > K$  トナリ又  $E \subset N$   
 = 對シテ  $\mu(E) > 0$  トナレバ

$$\mu(P+E) = \mu(P) + \mu(E) > K$$

トナリ何レモ矛盾 = 達スル。

ヨツテ証明ハ  $\mu(P) = K$  ナルコトノ証明 = 歸スル, 先ヅ  
 任意ノ Borel set  $A, B \subset O$  = 對シテ

$$\begin{aligned}\mu(A+B) &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cdot B) \\ &\geq \mu(A) + \mu(B) - K\end{aligned}$$

更 = 一般 = 任意ノ有限個ノ Borel set  $A_i \subset O$  ( $i=1, 2, \dots$   
 $\dots, n$ ) = 對シテ

$$\mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - (n-1)K$$

ヨツテ

$$\begin{aligned}\mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} E_n\right) &\geq \sum_{n=m}^{m+p} \mu(E_n) - p \cdot K \\ &> \sum_{n=m}^{m+p} \left(K - \frac{1}{2^n}\right) - p \cdot K \\ &= K - \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+p}}\right) \\ &> K - \frac{1}{2^{m-1}}\end{aligned}$$

$\mu$  ハ total additive ナルカヲ

$$K \geq \mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} E_n\right)$$

$$\geq K - \frac{1}{2^{m-1}}$$

ヨツテ再ビ  $\mu$  が *total additive* ナルコトヲ用フレバ

$$\begin{aligned} K \leq \mu(P) &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) \geq K \end{aligned}$$

$$\therefore \mu(P) = K$$

コノ分解ヲ用ヒテ更ニ  $G$  全体ヲ同様ノ性質ヲモツタニツノ  
Borel 集合  $P$  ト  $N$  トニ分解スルコトヲ考ヘル。

假定ニヨリ  $G$  は *locally compact, separable* ナ  
アルカラ *closure* が *compact* ナアル如キ *open set*  
 $O_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) ヲ取り  $G = \sum_{i=1}^{\infty} O_i$  トナシメルコトが  
出来ル。(  $O_i, O_j$ ,  $i \neq j$  ハ共通点ヲ持ツテモヨイ!)  
コノ各々ノ  $O_i$  ハ上記ノ如ク *Positive part*  $P_i$  ト *neg-*  
*ative part*  $N_i$  トニワカレル。

$$O_i = P_i + N_i, \quad P_i \cdot N_i = \Lambda.$$

シカニ任意ノ  $i, j$  に対シテ  $\mu(P_i \cdot N_j) = 0$  トナル。コレ  
ハ  $P_i \cdot N_j \subset P_i$  ナルコトヨリ  $\mu(P_i \cdot N_j) \geq 0$ ,  
 $P_i \cdot N_j \subset N_j$  ナルコトヨリ  $\mu(P_i \cdot N_j) \leq 0$  トナルコトヲ考  
ヘレバ明カデアアル。コノ  $P_i$  = ヨツテ

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i, \quad N = G - P$$

トオケバ  $G = P + N$  が求ムル分解トナルコトハ明カデアアル。

即ち  $P, N$  の明カ = Borel 集合で  $P \cdot N = \Lambda$ , 且ッ任意  
 $E \subset P$  上ル Borel 集合  $E$  対シテハ  $\mu(E) \geq 0$ ,  
 $E \subset N$  上ル Borel 集合  $E$  対シテハ  $\mu(E) \leq 0$  トナルコト  
 モ明カデアアル。

此ノ如ク  $G$  フ  $P$  ト  $N$  ト = 分解スルトキハコノ  $P$  が (I)  
 ノ條件ヲ満足シテキル。即チ任意ノ  $a \in G$  対シテ

$$\mu(P \dot{+} aP - P \cdot aP) = 0$$

トナツテキル。何トナレバ

$$\begin{aligned} P \dot{+} aP - P \cdot aP &= (P - P \cdot aP) + (aP - P \cdot aP) \\ &= P \cdot aN + aP \cdot N \end{aligned}$$

= テ  $\mu(P \cdot aN)$  ハ  $P \cdot aN \subset P$  上ルコトヨリ  $\geq 0$ ,

$P \cdot aN \subset aN$  = テ  $\mu$  が *left invariant* 上ルコトヨリ  
 $\leq 0$  トナルカラ  $\mu(P \cdot aN) = 0$  トナル。

又同様 =  $\mu(aP \cdot N) = 0$  トナルコトモ示サレ, 且ッ  
 $P \cdot aN, aP \cdot N$  ハ共通点ヲ持タナイカラ

$$\mu(P \dot{+} aP - P \cdot aP) = \mu(P \cdot aN) + \mu(aP \cdot N) = 0$$

トナルノデアアル。

ヨツテ、 $G$  が *ergodic* ナリトノ假定ヨリ (コレハ  
 I デ証明シタコト)  $\mu(P) = 0$  又ハ

$$\mu(G - P) = \mu(N) = 0$$

デナケレバナラナイ。

然ルニ他方  $\mu$  ノ作りカヨリ  $\mu(E_1) > 0, \mu(E_2) < 0$   
 デアルカラ  $\mu(P) > 0, \mu(N) > 0$  デナケレバナラナイ。

コレハ矛盾デアアルカラ  $G$  ノ *left-invariant + measure*

ハ *unique* デナケレバナラヌ。(証明終)